

乱数シード探索の極値統計と最適リソース配分

結論：複数シードを短く試し、観測に基づいて選別し、残した探索へ資源を集中する。

理論の結論

本数による改善を定量化
本数と探索量を配分
指数推定の配分損失を評価

実データの役割

序盤から選べるか
早切りで何を失うか
推定と増強は有効か

Tool への反映

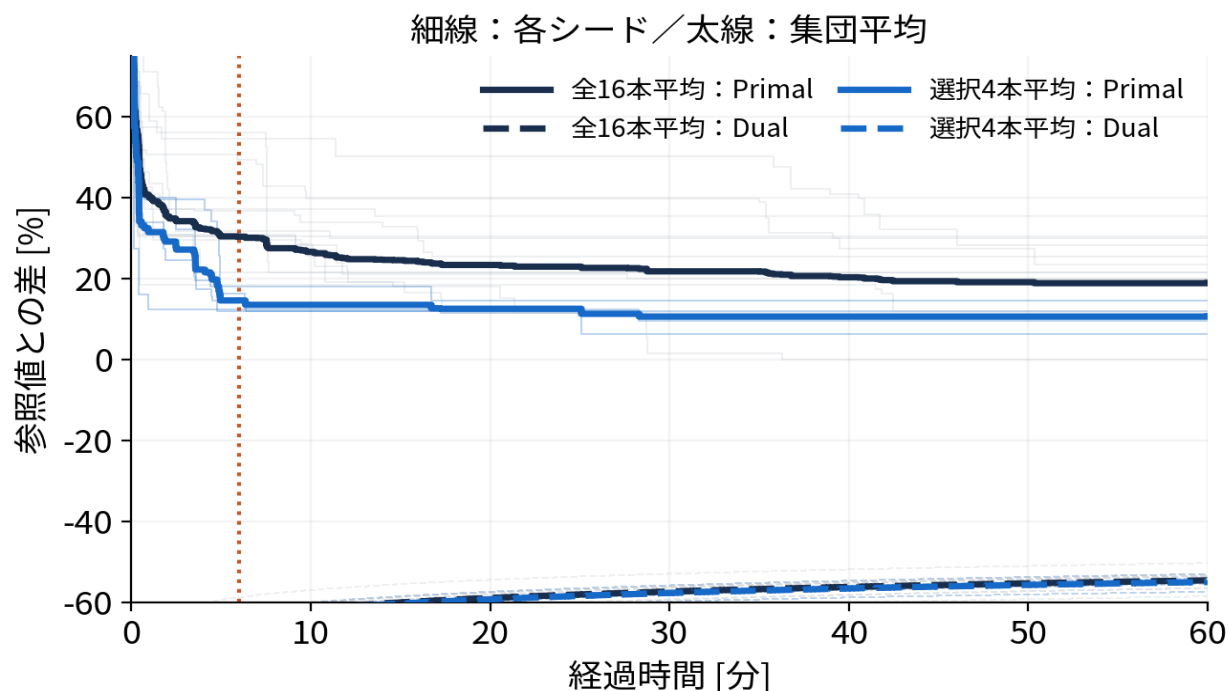
ばらつき・順位で判断
有望な k 本を残す
スレッドを再配分

杉田 宜之 | 株式会社 Gurobi Japan

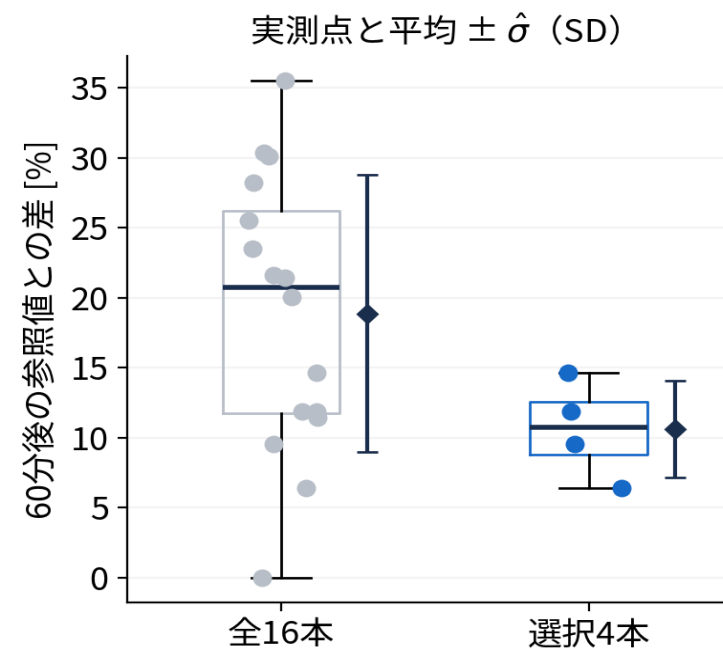
日本 OR 学会 2026 年秋季研究発表会 | 京都大学

序盤の良さから、終盤も良いシードを選べるか？

milo-v13-4-3d-4-0 | Gurobi ・ 16 シード ・ 各 2 スレッド ・ 60 分（6 分で上位 4 本を選択）



選択4本は6分時点で固定（それ以前も同じ4本を表示）。平均は各時点の16本／4本の等重み平均。



60 分の品質：全 16 本 $18.88 \pm 9.91\%$ → 選択 4 本 $10.62 \pm 3.49\%$ （平均 $\pm$ SD）

参照値 358,152.2622：今回の 16 本の最終最良値。最適性を証明した値ではない。

背景文献：同じ問題でも、シードで探索性能が変わる

乱数シードは問題を変えない。しかし、探索経路と計算時間は変わり得る。

シードだけを変えた比較でも、探索性能に差が生じる [1]

[1] T. Achterberg and R. Wunderling (2013).

“Mixed Integer Programming: Analyzing 12 Years of Progress.”

In M. Jünger and G. Reinelt (eds.), Facets of Combinatorial Optimization, Springer, pp. 449–481.

性能変動の要因と、ベンチマーク評価の注意点を整理 [2]

[2] A. Lodi and A. Tramontani (2013).

“Performance Variability in Mixed-Integer Programming.”

Theory Driven by Influential Applications, INFORMS TutORials in Operations Research, pp. 1–12.

本研究：最良値の統計・序盤の情報・資源配分を、理論と MIP の履歴から分析する。

問い：ばらつきを踏まえ、限られた計算資源を、どのシードに・どれだけ配るか。

解析対象：Gurobi 121 問、SCIP ・ HiGHS 各 44 問

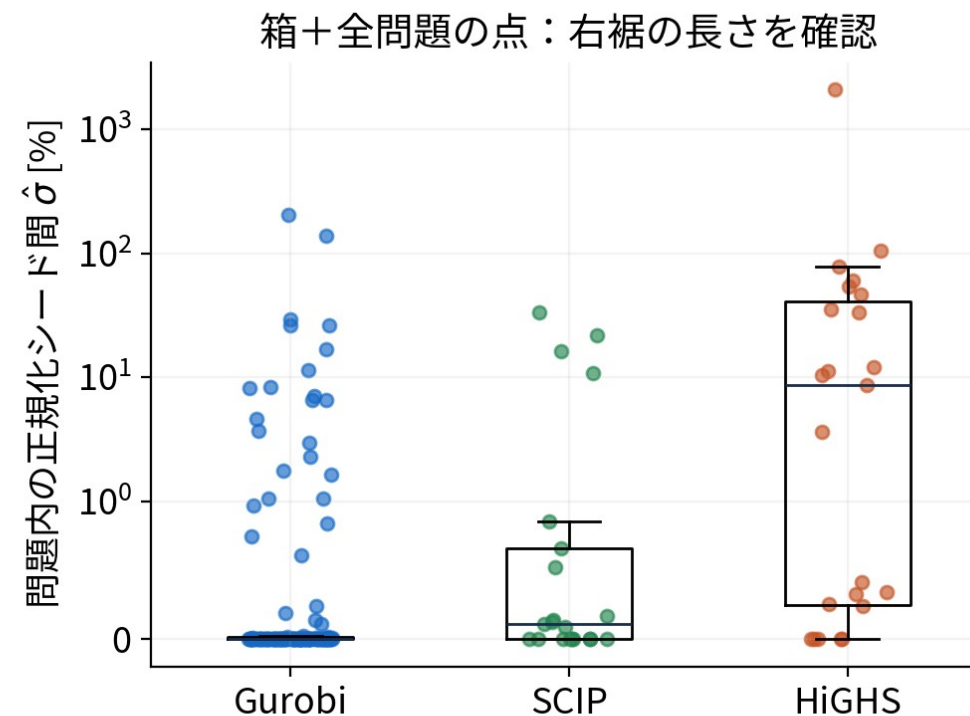
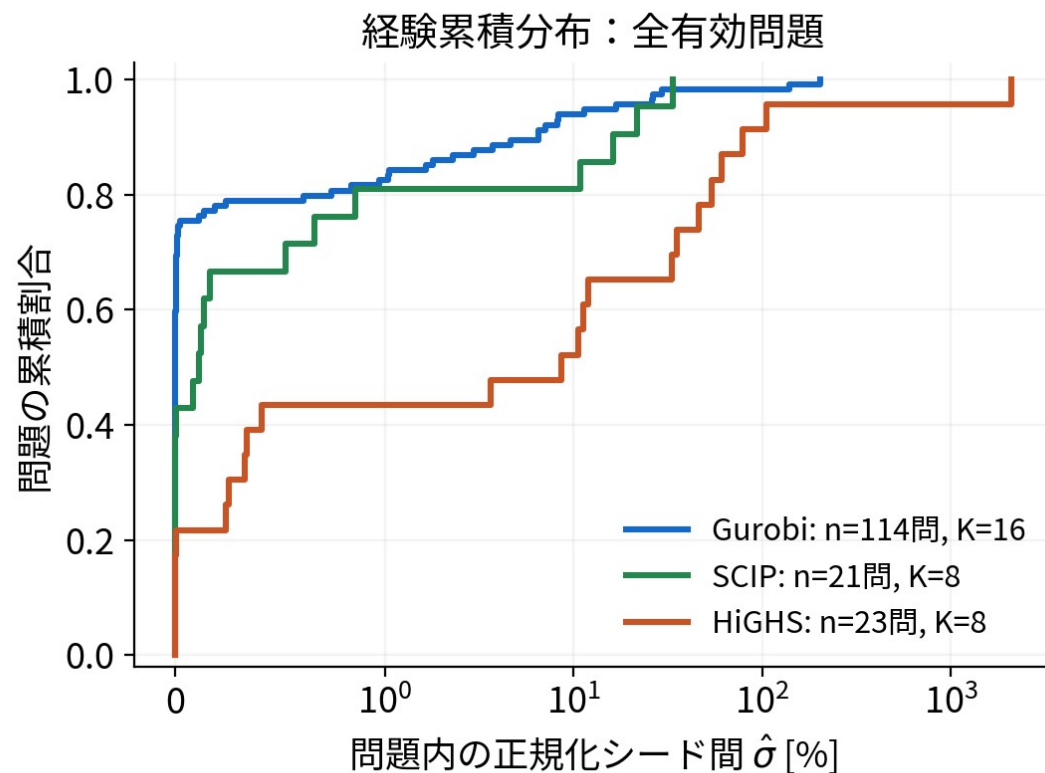
ソルバー	全取得数	取得内容	品質を比較できる問題
Gurobi	121 問 × 16 シード	2 スレッド ・ 各 1 時間	全 16 本有効：114 問
SCIP	44 問 × 8 シード	暫定解 ・ 下界の記録	全 8 本で有限値：21 問
HiGHS	44 問 × 8 シード	暫定解 ・ 下界の記録	全 8 本で有限値：23 問

**Gurobi：121 問 → 有効な軌跡あり 115 問 → 全 16 本が有効 114 問
→ 品質差の大きい 23 問で、序盤の選別効果を重点解析。**

抄録の統計は収集 110 問 ・ 当てはめ 105 問。追加解析と区別して報告する。

23 問は全データではなく部分集合。複数ソルバーのデータも取得している。

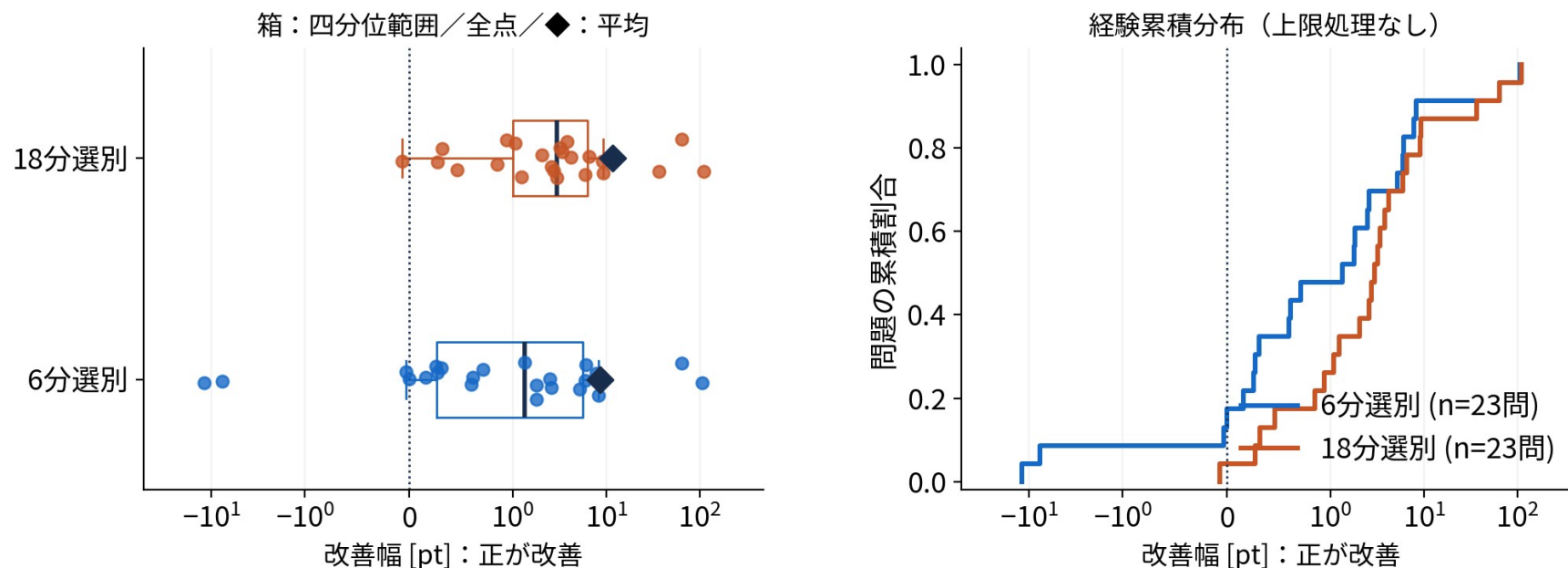
シード間のばらつきは、問題によって大きく異なる



正規化 SD = $100 \times \text{問題内の最終目的値の SD} / \max(|\text{中央値}|, 1)$ 。1% 超を対数表示。

各点は1問のシード間SD。ゼロ付近も裾の長い問題も含めて表示する。ソルバーの順位ではない。

早期選別の効果：典型的な改善と、大きな改善を分けて見る

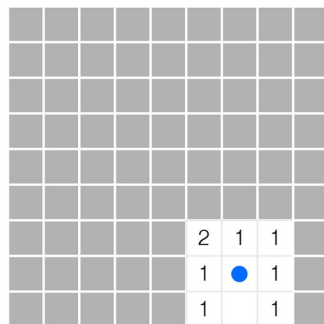


選別時刻 / n	平均 ± SD [pt]	中央値 [四分位範囲]	平均の 95% 区間
6 分 / 23 問	8.54 ± 25.36	1.33 [0.27, 5.57]	[0.46, 20.18]
18 分 / 23 問	11.78 ± 25.72	2.94 [1.00, 6.24]	[3.18, 23.57]

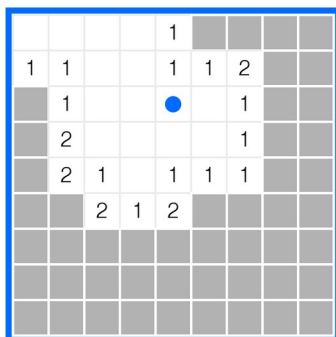
6 分：平均 8.54 pt ・ 中央値 1.33 pt。右裾の大改善を、典型的な効果と混同しない。

マインスイーパー：同じ1手でも、開く領域が違う

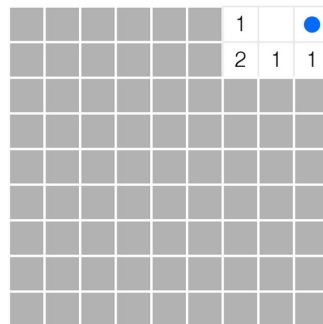
seed 0: 1 click, 9 cells open



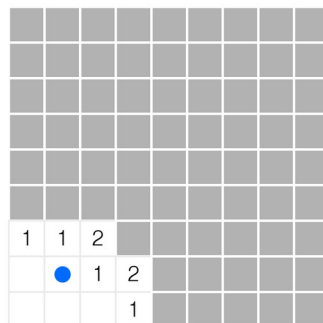
seed 2: 1 click, 33 cells open
(keep this one)



seed 1: 1 click, 6 cells open



seed 3: 1 click, 11 cells open



同じ盤面で、最初のクリック位置だけを変える。

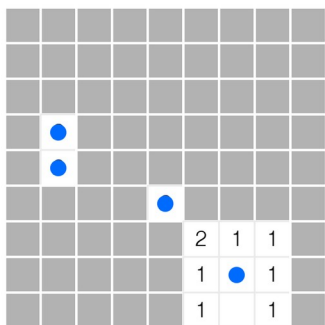
開いたマスは $9 \cdot 6 \cdot 33 \cdot 11$ 。

短く試した段階で、続きを調べたい候補が見える。

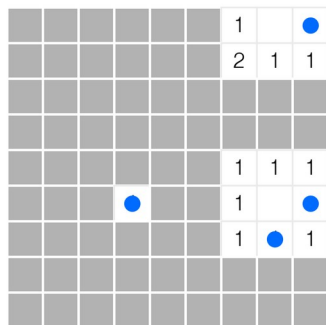
複数の候補を短く試し、有望な候補の続きを調べる。

シードは「最初の一手」ではなく、無作為な選択の列

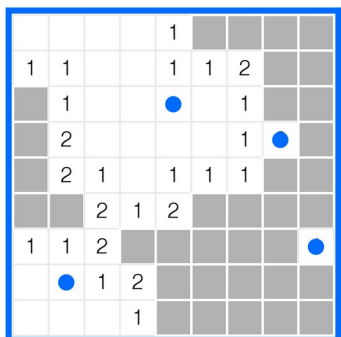
seed 0: 4 random clicks, 12 cells open



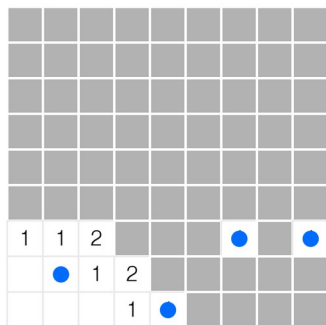
seed 1: 4 random clicks, 16 cells open



seed 2: 4 random clicks, 46 cells open
(keep this one)



seed 3: 4 random clicks, 14 cells open



さらに各候補で同じ 3 手を加える。

4 手の合計： $12 \cdot 16 \cdot 46 \cdot 14$ マス。
同じ労力をかけても、進み方はそろわない。

ただし MIP では後から順位が逆転する。その頻度と損失をデータで測る。

探索を「候補の選別」と「資源を増やした継続」に分ける

例：総コア数 32 を保ちながら、残したシードのスレッド数を増やす。

1 回で
選別

16 本 × 2 スレッド

4 本 × 8 スレッド

選別 ↓

段階的に
選別

16 本 × 2

8 本 × 4

4 本 × 8

選別 ↓

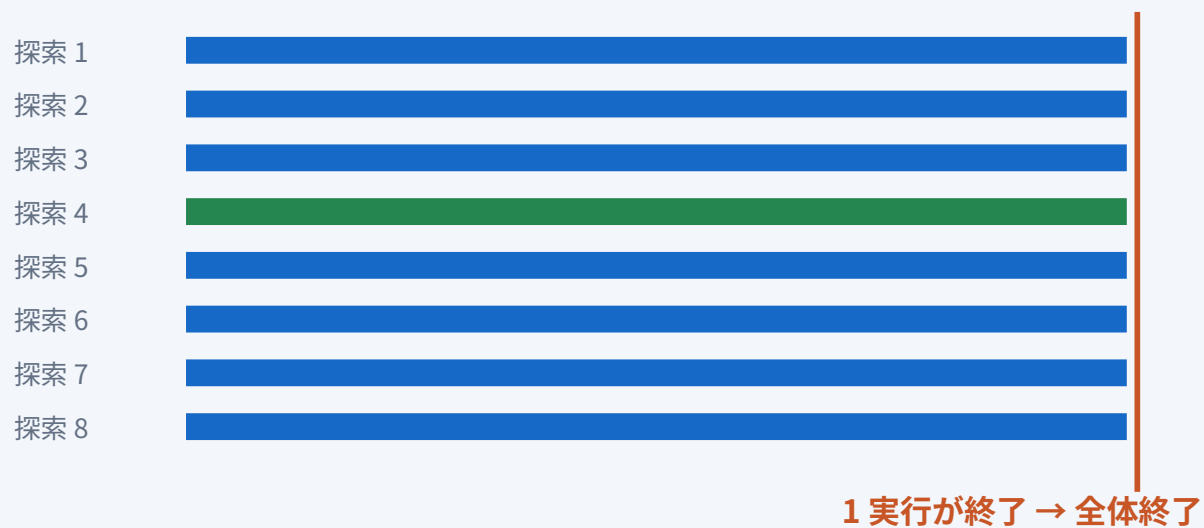
選別 ↓

候補数 K ・ 残す本数 k ・ 選別時刻を別々に設計する。

Gurobi にも、複数の探索を並走させる標準機能がある

例：Threads=32、ConcurrentMIP=8 → 8 探索 × 各 4 スレッド

異なる Seed で開始し、独立に並走



標準機能でできること

利用可能スレッドを等分
既定では Seed を変える

Concurrent 環境を使えば
MIPFocus 等も指定できる

[Gurobi : Concurrent Optimization ↗](#)

[Gurobi : ConcurrentMIP parameter ↗](#)

複数シードの並走そのものは標準機能。Tool の違いは、途中の観測による選別と再配分。

ConcurrentMIP との違い：途中で「残す本数と配分」を変える

比較する点	標準 ConcurrentMIP	Seed Race Tool（今回の実装）
並走と配分	独立探索にスレッドを等分 例：8 探索 × 4 スレッド	序盤 8 本 × 4 → 選別後 2 本 × 16 有望な候補へ資源を移す
途中の選別	公式に記載された機構は 1 実行の終了で全体終了	ばらつき・順位安定を観測 手動 Cut / 自動 Cut / 多段選別
記録と観測	callback は内部の 1 実行のみ 全戦略の個別情報は得られない	各シードの Work・暫定解・限界 選別前後の記録を保存
評価上の注意	MIP の並走は非決定的	選別は Work 上の規則 壁時計性能の同一性は保証しない

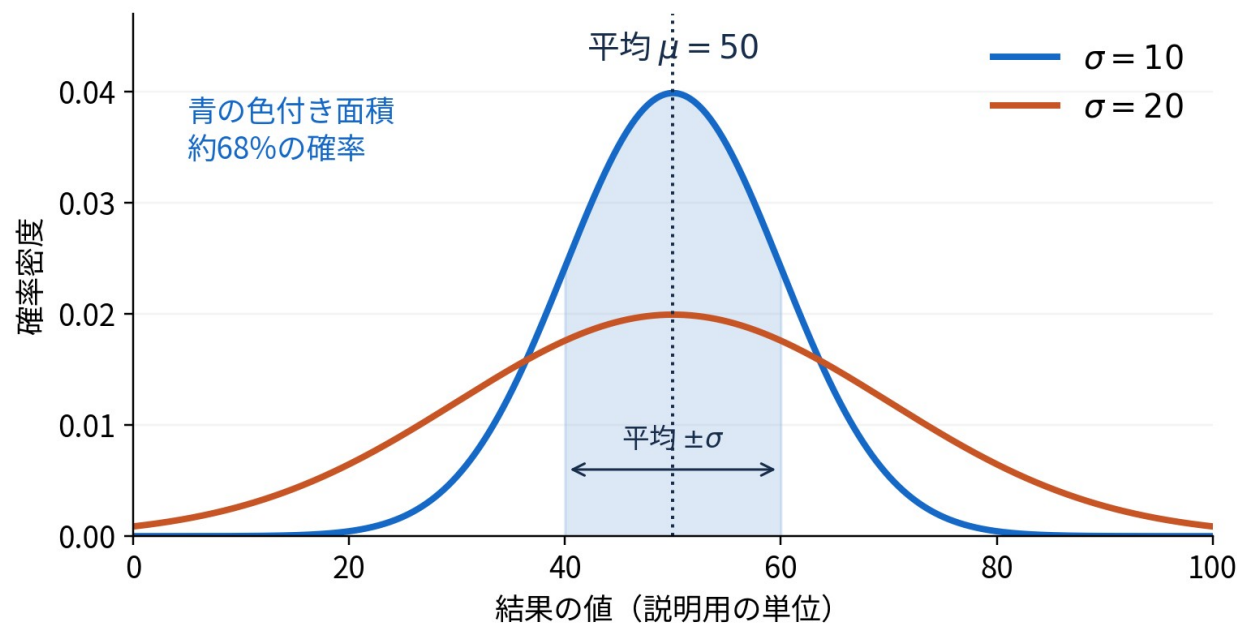
今回の比較基準は単一の多スレッド実行。ConcurrentMIP への性能優位は未検証。

違いは制御と検証の単位。選別・再開の費用もあるため、標準機能より速いとはまだ言えない。

分布とは？ 「平均」と「ばらつき」から、良い側の裾へ

同じ問題でも、シードを変えると結果はばらつく。

「どの値が、どのくらい出やすいか」を表すのが分布。



平均 μ : 中心の位置

標準偏差 σ : ばらつきの大きさ
 σ が大きいほど、山は広く低い。

Seed Racing で知りたいこと

良い結果がどのくらい出るか？

複数本で、どこまで良くなるか？

平均・SD だけでは形は決まらない。

曲線の下面積が確率。正規分布は入口の例であり、MIP の品質が正規分布とは限らない。

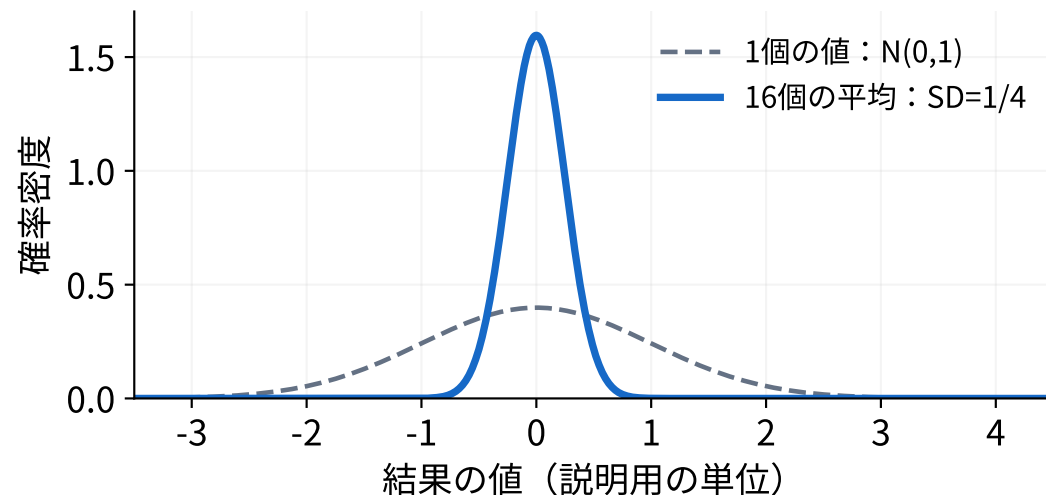
次の2つの見方へ：良い側の裾を取り出す → GPD / 複数本の最良値を見る → Weibull 型

正規分布との違い：「平均」と「最大・最小」は別の統計量

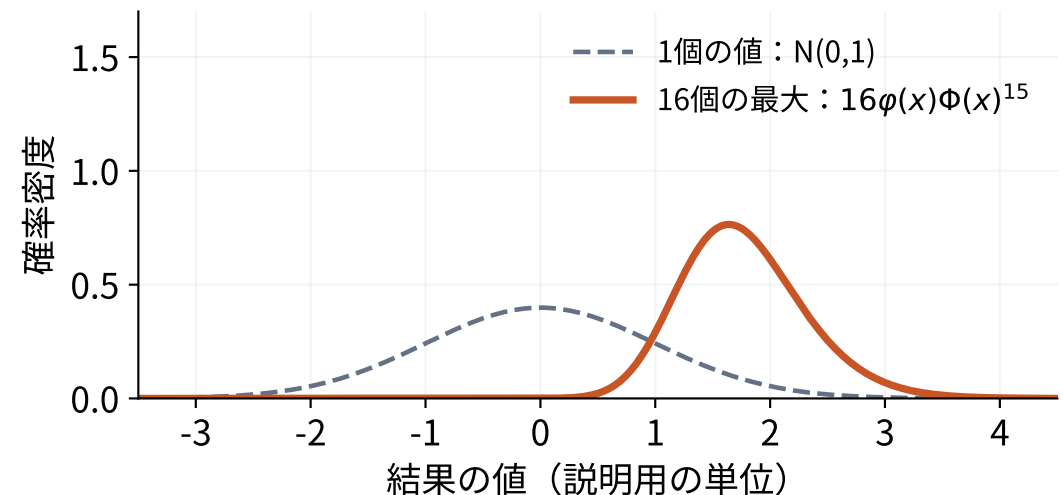
平均・和：独立同分布・有限分散などの条件下で、標準化すると正規分布へ。

最大・最小：中心ではなく裾を見る。位置・尺度で正規化した極限を極値統計で扱う。

同じ正規母集団から16個の平均を取る



同じ正規母集団から16個の最大を取る



図は正規母集団からの厳密な16個の平均／最大。右の有限標本の曲線はGumbel近似ではない。

[NIST：中心極限定理](#)

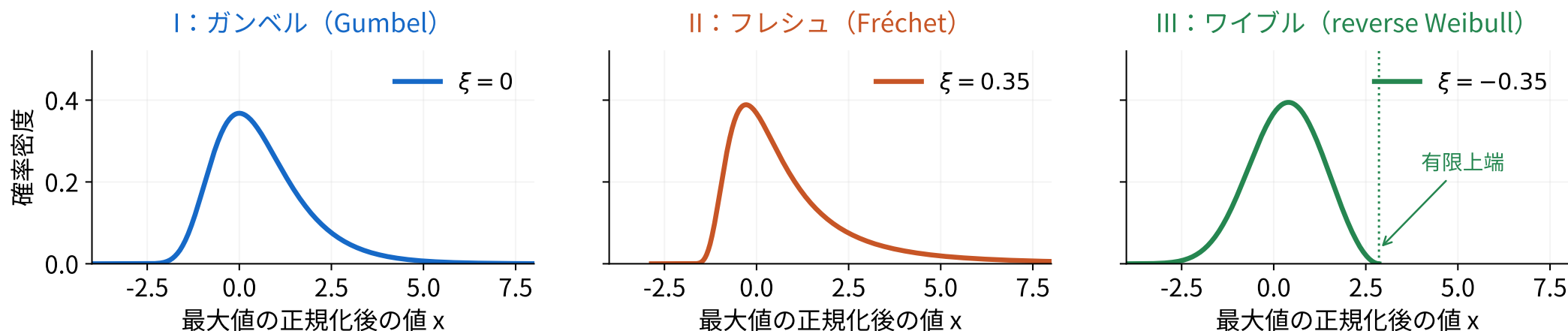
[Fisher & Tippett \(1928\)](#)

元の値が正規分布でも、最良値は正規分布とは限らない。MIPのシード結果の正規性は仮定しない。

極値分布の 3 タイプ：違いは「裾の厚さ」と「端点」

独立同分布の最大値を位置・尺度で正規化し、点に潰れない極限が存在するなら 3 タイプ。
一般化極値分布（GEV）では、形状 ξ の符号で表す（ $\xi=0$ は式の極限）。

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right]^{-1/\xi}\right\} \quad (\xi \neq 0), \quad 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$$



図は $\mu=0 \cdot \sigma=1$ 。 μ は位置、 $\sigma>0$ は尺度であり、一般には平均・標準偏差そのものではない。

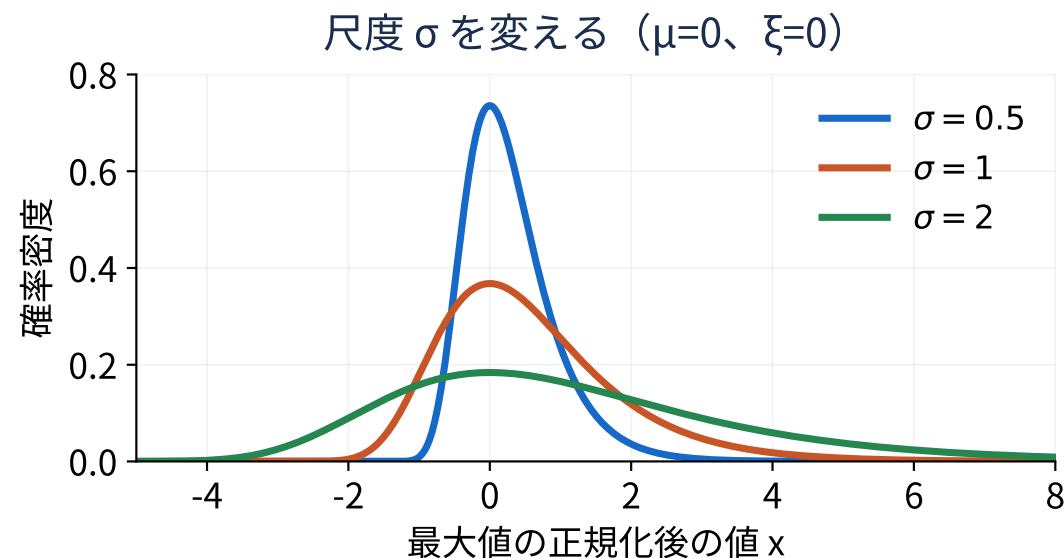
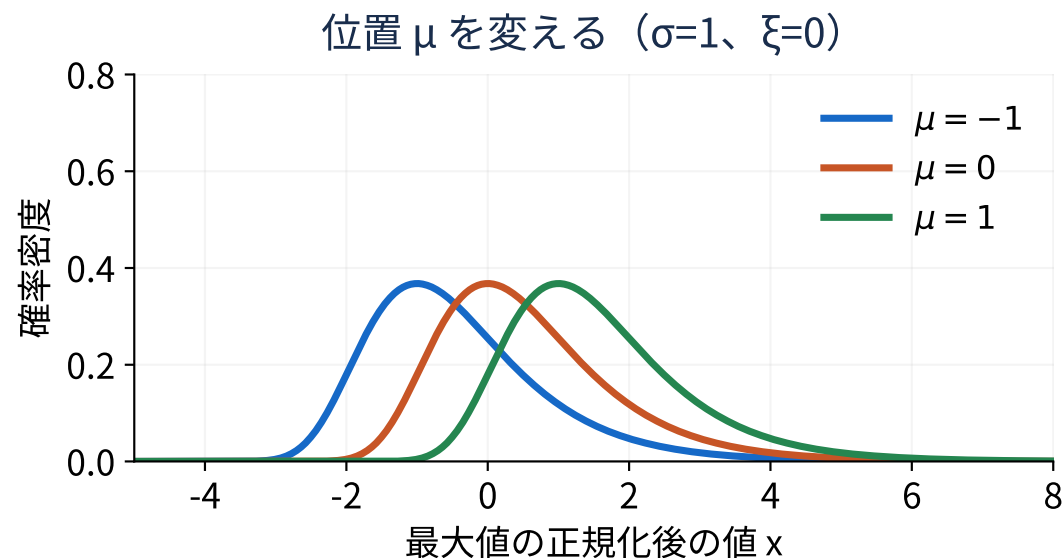
[Fisher & Tippet \(1928\)](#) ↗

[SciPy : GEV の定義・符号](#) ↗

$\xi=0$: ガンベル / $\xi>0$: フレッシュ (右の厚い裾) / $\xi<0$: ワイブル (有限の上端)。

I : ガンベル型 — 位置と尺度を変えると、山はどう動くか

μ を変えると左右へ移動。 σ を大きくすると横に広がり、密度の山は低くなる。
どちらを変えても、位置・尺度をそろえ直すと同じガンベル型の形になる。



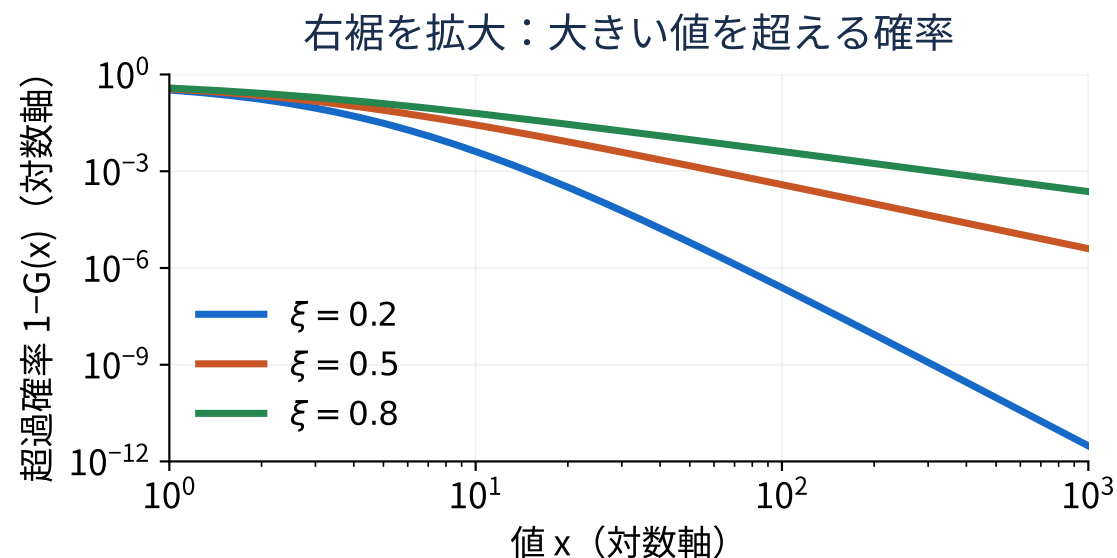
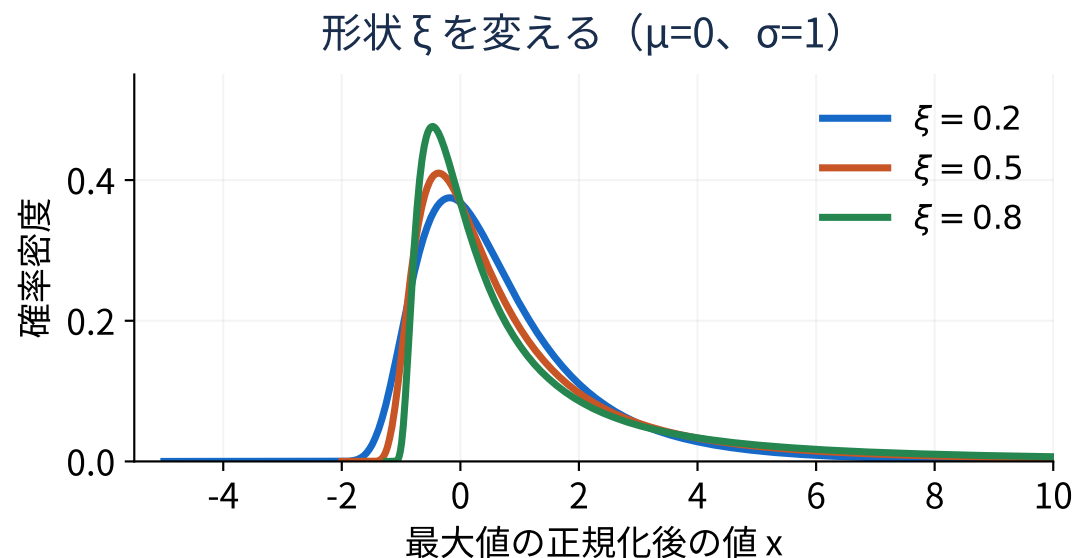
正規分布のような左右対称ではなく、右側に長い裾。有限の上端はない。

[SciPy : Gumbel \(最大値\)](#) ↗

ガンベルの曲線の違いは位置・尺度の違い。 ξ を変えれば、別の極値タイプへ移る。

II：フレッシュ型 — 形状 ξ が大きいほど、遠い右裾が厚い

遠い大きな値にも、無視できない確率が残る「べき乗の裾」。
右図の超過確率で見ると、 ξ が大きいほど、遠い裾での減り方が緩やかになる。



$\mu \cdot \sigma$ 固定でも下端 $\mu-\sigma/\xi$ は変わる。右図は両軸とも対数。図の外の上側にも確率が続く。

SciPy : GEV の定義・符号 ↗

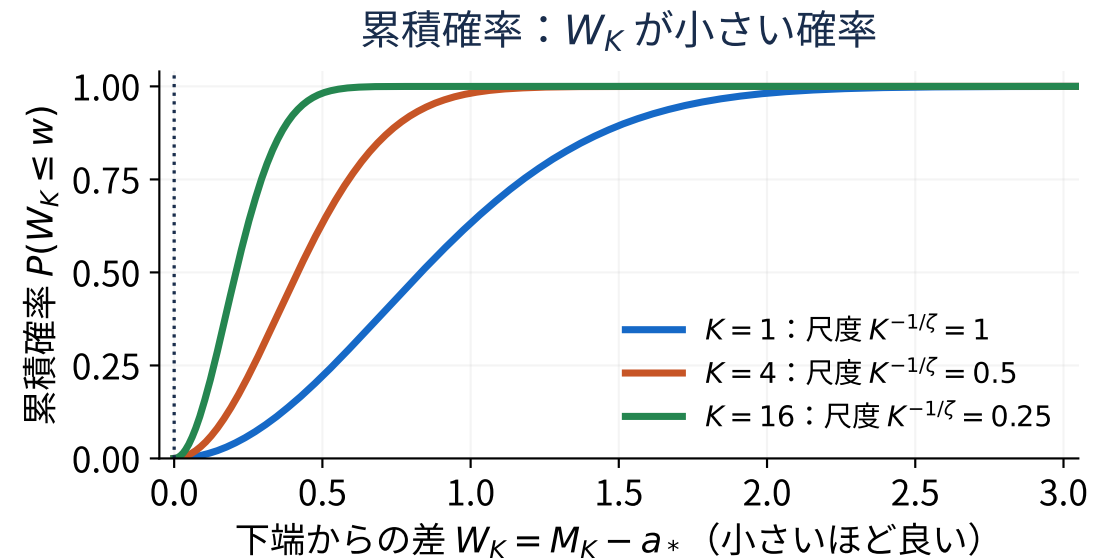
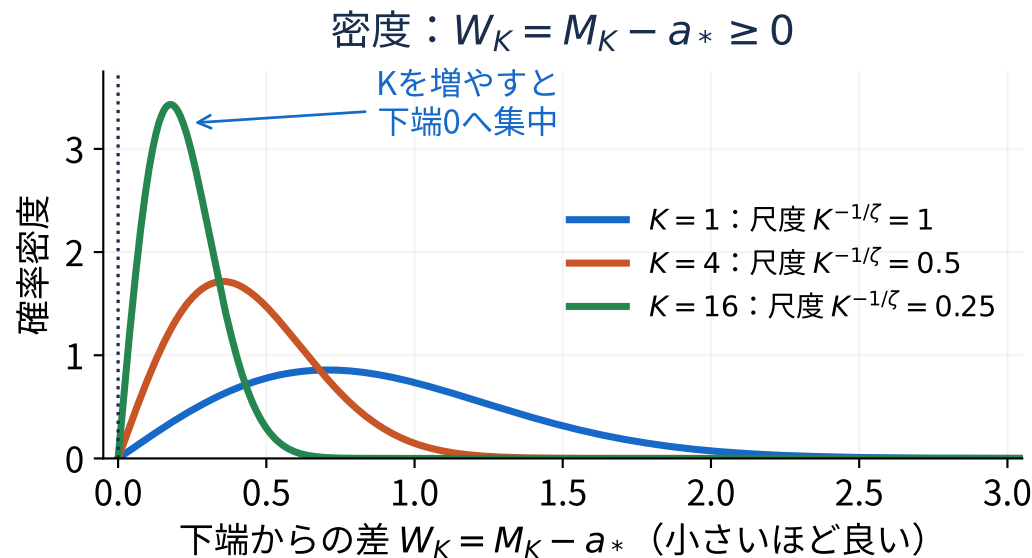
NIST : 極値 3 タイプとの対応 ↗

$\xi > 0$ では有限の上端を持たない。密度の中心だけでなく、遠い値を超える確率を見る。

今回のワイブル型：K本の最小値が、有限の下端へ近づく

各シードの品質を A_i 、K本の最良値を $M_K = \min_i A_i$ とする。

下端 a^* からの差 $W_K = M_K - a^* \geq 0$ が、最小値側の Weibull 型になる。



説明例は $\zeta=2$ 、 $C=1$ 。本数 K を増やすと尺度 $K^{-1/\zeta}$ が縮み、最小値は下端 a^* へ集中する。

[NIST : 通常の Weibull 分布](#)

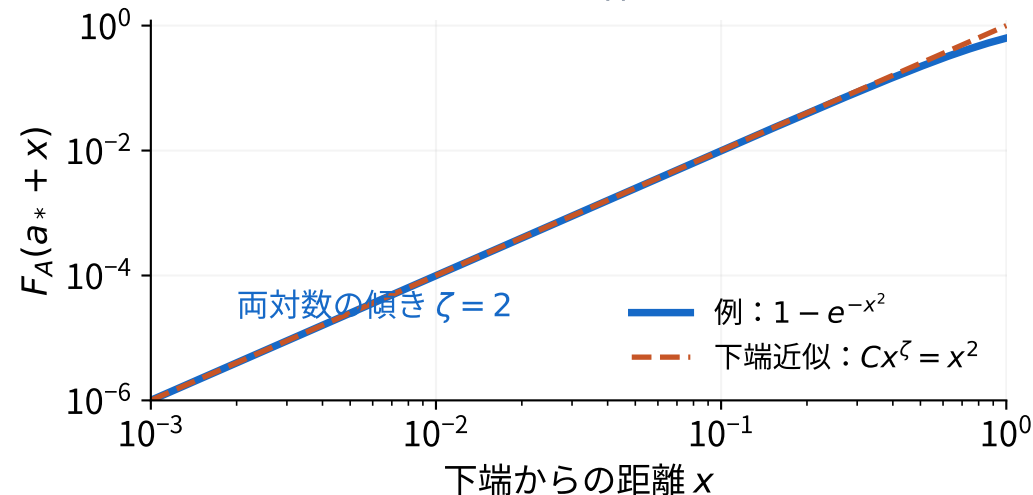
[Fisher & Tippett \(1928\)](#)

今回の主役は最大値ではなく $M_K = \min A_i$ 。最大値 GEV の符号規約は $\xi = -1/\zeta$ に対応するだけ。

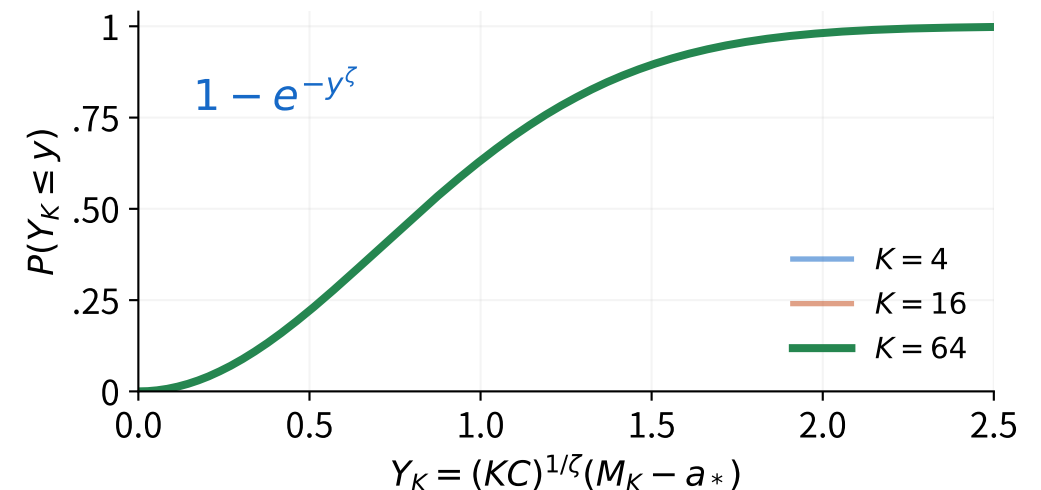
なぜ Weibull 型か：下端近傍の正則変動から、最小値を導く

下端近傍が正則変動する分布を仮定し、
最小値が Weibull 極値領域に属する。

仮定：下端近傍で $F_A(a_* + x) \sim Cx^\zeta$



結論：正規化した最小値はWeibull型



$$F_A(a_* + x) \sim Cx^\zeta \quad (x \downarrow 0) \implies \Pr(M_K - a_* > x) \approx \exp(-KCx^\zeta)$$

$$\lambda_K = (KC)^{-1/\zeta}, \quad \Pr((KC)^{1/\zeta}(M_K - a_*) \leq y) \rightarrow 1 - e^{-y^\zeta}$$

NIST : 通常の Weibull 分布 [↗](#)

Fisher & Tippet (1928) [↗](#)

有限の下端だけでは足りない。独立性・下端近傍の連続べき乗裾（正則変動）が条件。

極値統計の入口：平均ではなく「最も良い 1 本」を使う

仮に、1 本が「十分良い値」に届く確率が 10% なら、
K 本のうち少なくとも 1 本が届く確率は？

$$1 - (\text{すべて外す確率}) = 1 - 0.9^K$$



16 本は 4 本より良い候補を含みやすい。ただし、どれが良いかを序盤に見抜く問題は別。

「良い候補が含まれる確率」と「その候補を早期に残せる確率」を分けて考える。



極値則はどこから出るか：「全員が届かない確率」を考える

① 1 本を見る

$F(a)$: 結果 A が a 以下になる確率

② 全員が外す

1 本が外す確率 $1-F(a)$
独立なら K 本分を掛ける

③ 最良値を見る

最良値も a を超える
= 全 K 本が a を超える

$$M_K = \min_{1 \leq i \leq K} A_i,$$

$$\Pr(M_K > a_* + x) = \{1 - F_A(a_* + x)\}^K \\ \approx \exp(-KCx^\zeta).$$

裾の仮定：

$$F(a_* + x) \approx Cx^\zeta$$

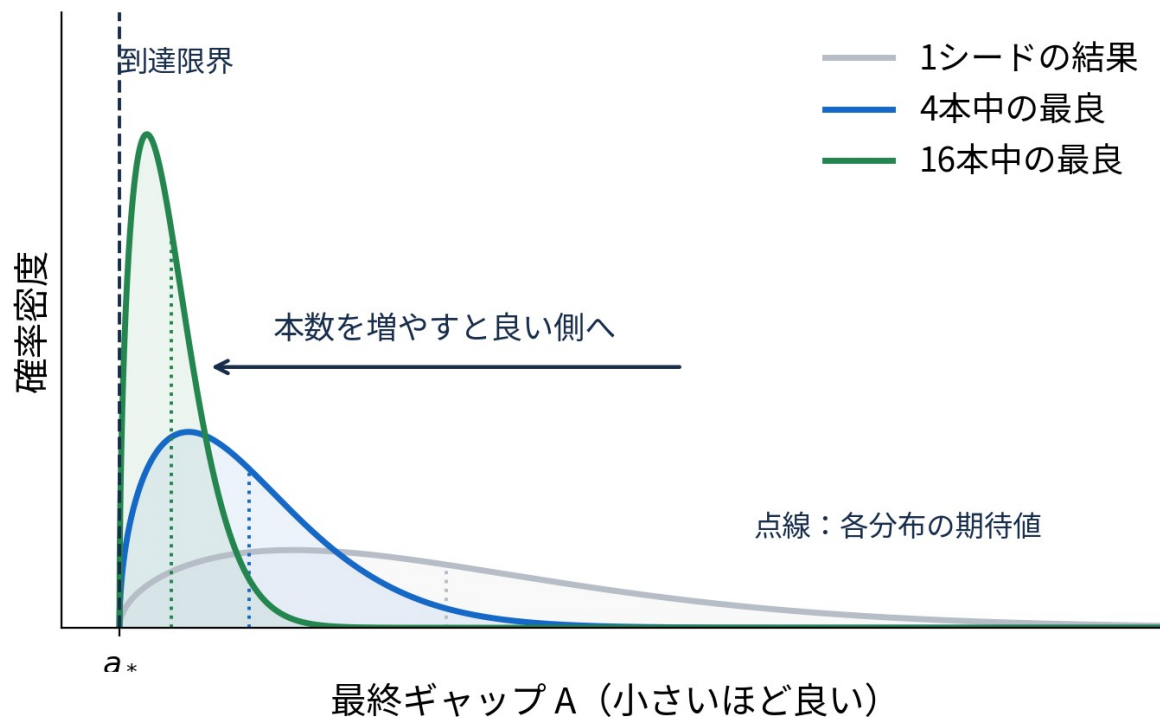
限界付近の「出やすさ」を
指数 ζ で表す。

KCx^ζ が同じ大きさなら確率も同程度 → 限界との差の尺度は $K^{(-1/\zeta)}$ 。

厳密なのは独立性による積。指数関数とべき乗則は、下端近くでの近似・漸近。

極値統計：本数を増やすと「最良値の分布」はどう変わるか

1 本の結果ではなく、K 本から選んだ「最良」の分布を考える。



品質：締切 T を固定

$$\mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq K} A_i \right] - a_* \\ \sim \Gamma \left(1 + \frac{1}{\zeta_A} \right) a_0 K^{-1/\zeta_A}$$

速度：目標ギャップ q を固定

$$\mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq K} T_i(q) \right] - t_*(q) \\ \sim \Gamma \left(1 + \frac{1}{\zeta_T} \right) b K^{-1/\zeta_T}$$

前提：独立同分布・下端近傍の正則変動。 ζ は下端への接近速度を表す。速度側では横軸を到達時刻と読む。

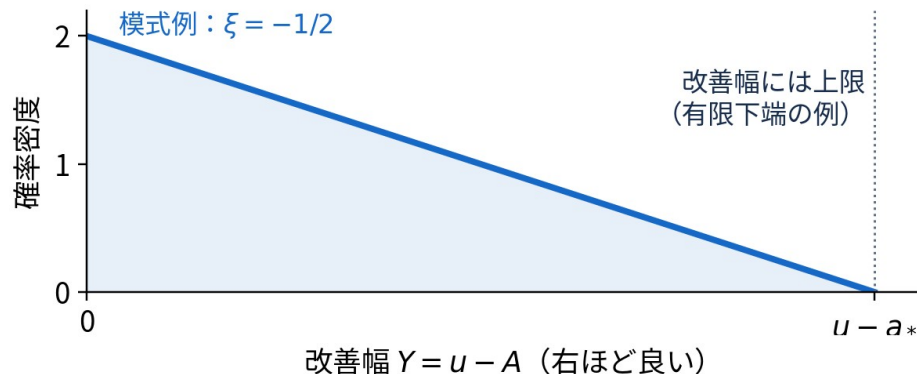
理論の結論①：同じ探索量なら、本数による最良値の改善を定量化できる。総予算固定の配分は別問題。

GPD と Weibull 型：どの結果を集めた分布なのか

GPD（一般化パレート分布）

基準 u より良い結果だけを集める。

改善幅 $Y = u - A$ の分布を近似する。



$$G(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-1/\xi} \quad (\xi \neq 0).$$

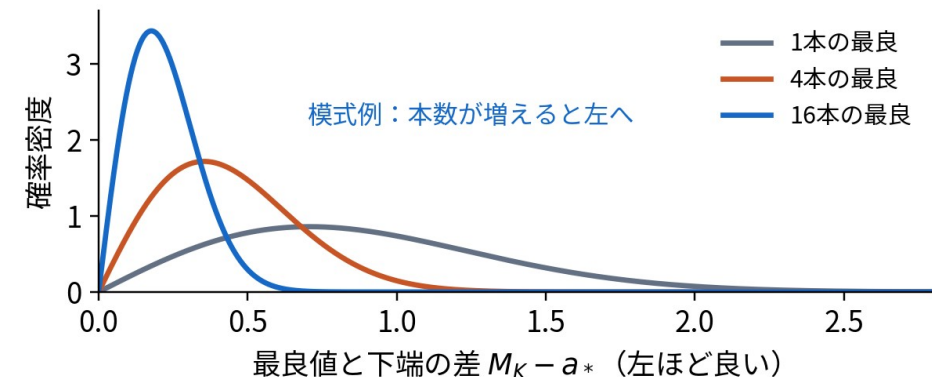
$G(y)$ ：改善幅が y 以下の確率。 ξ ：形、 β ：尺度。

$\xi < 0$ ：上限あり／ $\xi = 0$ ：指数型／ $\xi > 0$ ：長い裾。

Weibull 型：複数本の最良値

K 本から最良値を 1 つ残す。

これを繰り返したときの分布を考える。



$$\Pr(W \leq x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\zeta\right], \quad x \geq 0.$$

W ：最良値と下端の差、 λ ：尺度、 ζ ：形状。

独立なシードと、下端付近の連続べき乗裾が条件。

単一シード全体を Weibull 分布と仮定していない。2つは同じ裾の条件に対応する（数式は p.23）。

GPD と Weibull 型の極値則：同じ裾を、異なる量で記述する

$$F_A(a_* + x) \sim Cx^\zeta, \quad x \downarrow 0, \quad C > 0, \quad \zeta > 0, \quad \Pr(A = a_*) = 0.$$

K 本の最良値：極値の分布

$$M_K = \min_{1 \leq i \leq K} A_i,$$

$$\Pr(M_K > a_* + x) = \{1 - F_A(a_* + x)\}^K$$

$$\approx \exp(-KCx^\zeta).$$

閾値より良い結果：GPD

$$Y = u - A \quad \text{given } A < u,$$

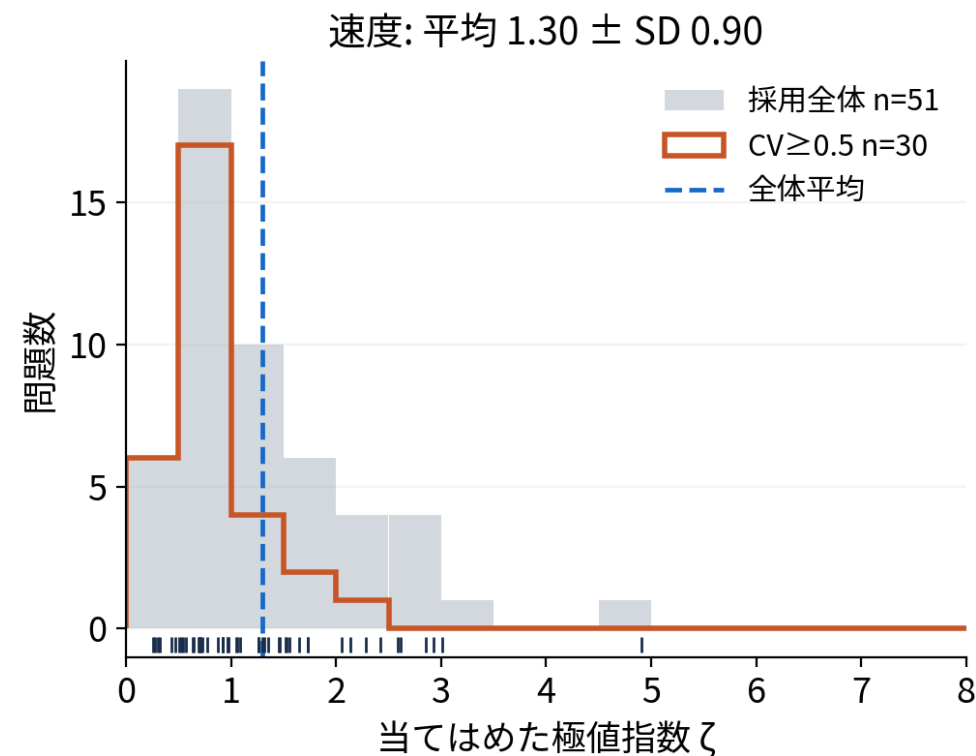
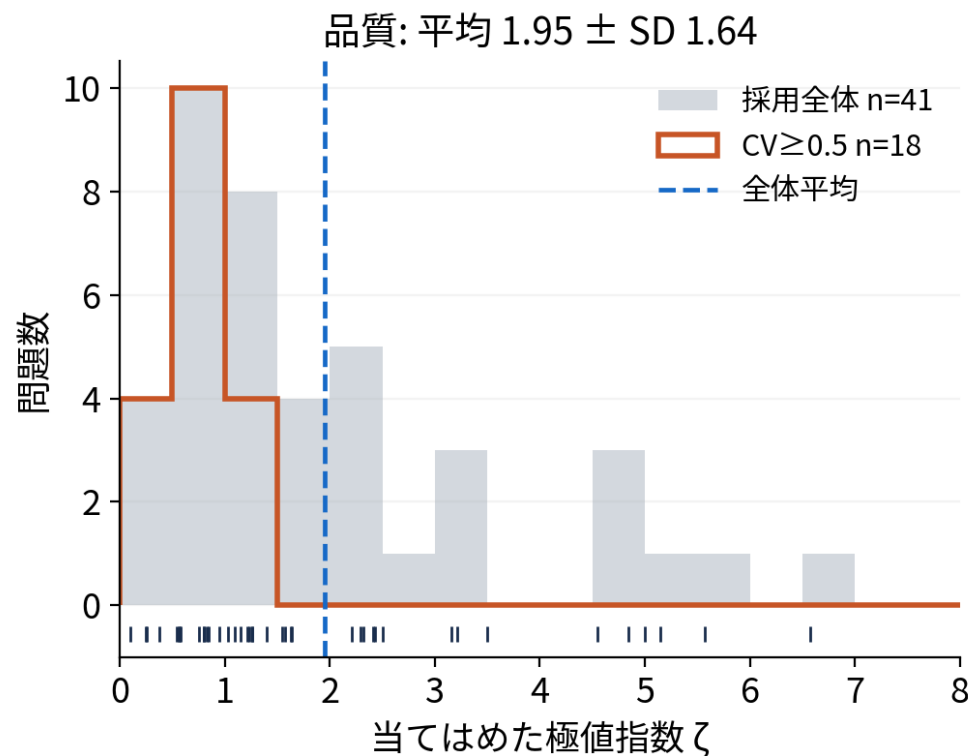
$$\Pr(Y > y \mid A < u) = \frac{F_A(u - y)}{F_A(u)}$$

$$\approx \left(1 - \frac{y}{u - a_*}\right)^\zeta.$$

$$\overline{G}(y) = \left(1 + \frac{\xi y}{\beta_u}\right)^{-1/\xi}, \quad \boxed{\xi = -\frac{1}{\zeta}}, \quad \beta_u = \frac{u - a_*}{\zeta}.$$

「GPD か極値則か」という二者択一ではない。理論の対応と、推定法の良し悪しを分ける。

極値指数の分布：採用数・平均・SD・裾を示す



CV ≥ 0.5 : 品質 n=18 ・ 中央値 0.78 / 速度 n=30 ・ 中央値 0.72

採用された当てはめの分布。未知シードの予測性能は、別の検証で確かめる。

GPD も比較：予測の良さは学習本数と推定法で変わる

36 問 × 16 シード／共通 200 分割／問題別 RMSE を集計（小さいほど良い）

予測方法	学習 4 → 未使用 12	学習 8 → 未使用 8
外挿なし：学習最良	0.196 ± 0.200	0.123 ± 0.162
学習経験分布	0.198 ± 0.201	0.134 ± 0.162
従来の best-of-k 曲線式	0.186 ± 0.191	0.125 ± 0.157
GPD：PWM・75% 閾値	0.220 ± 0.242	0.154 ± 0.196
GPD：モーメント法	0.200 ± 0.200	0.145 ± 0.169
GPD：0 への点質量を分離	0.198 ± 0.199	0.137 ± 0.162

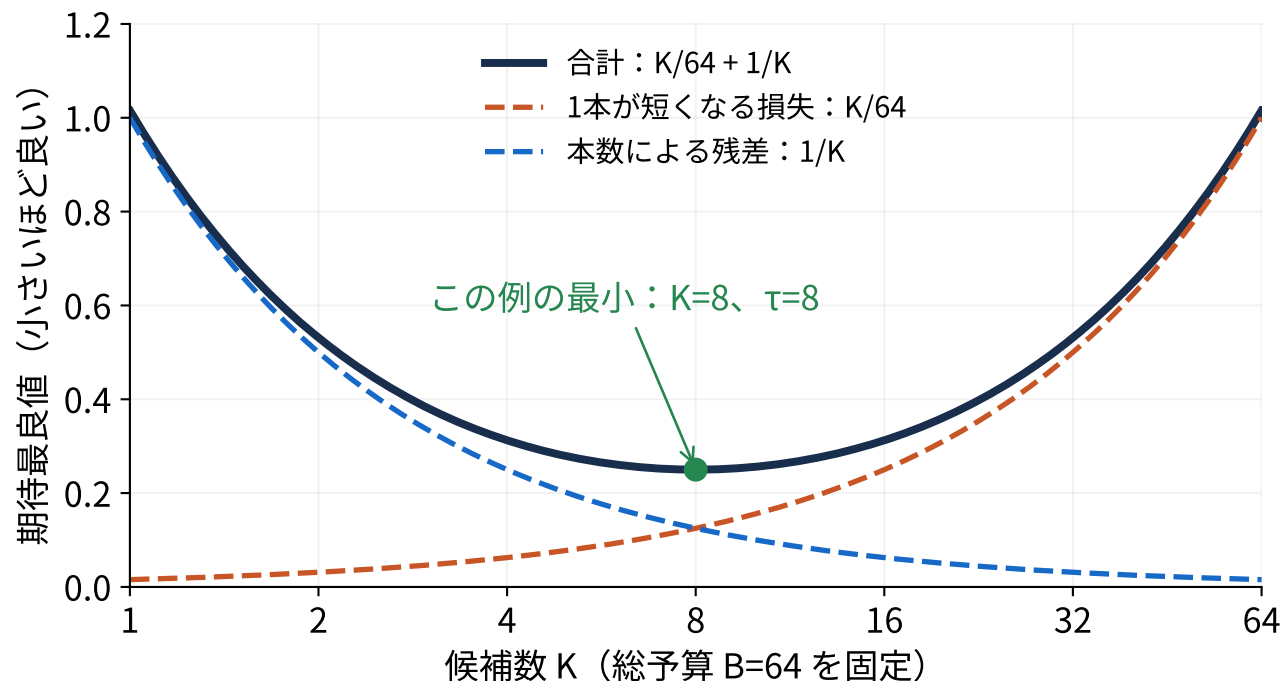
4 → 12：曲線式の平均 RMSE 改善 +0.0097 [95% 区間 0.0027 ~ 0.0178]

8 → 8：曲線式の差は区間に 0 を含む。SD は 36 問間の散らばり。

GPD の主設定・感度分析・推定失敗をすべて開示。この推定法の比較であり、分布族全体の判定ではない。

理論から配分へ：総予算が同じなら、多いほど良いとは限らない

予算 $B = K\tau = 64$ を固定。説明用に、期待最良値を $1/\tau + 1/K$ とする。
本数を増やす利得と、1本を短くする損失が同時に生じる。

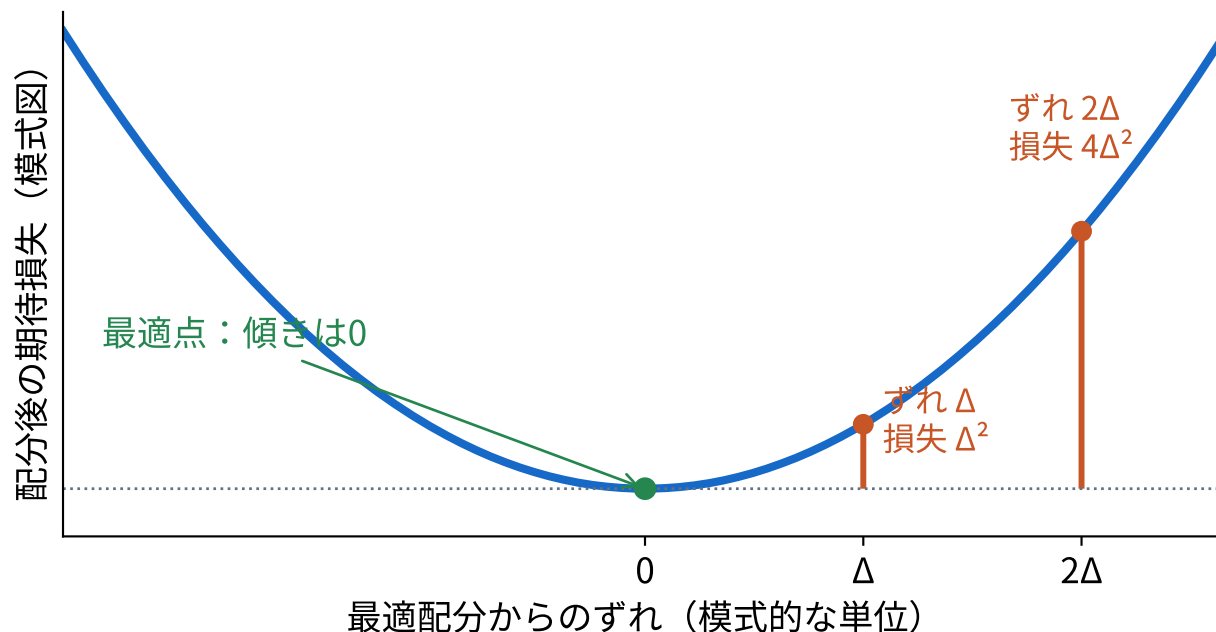


K	τ	期待値
4	16	0.3125
8	8	0.2500
16	4	0.3125

この例では中間に最小値。
MIP の最適 $K=8$ という意味ではない。

実際の配分には、シードの裾だけでなく、探索量を増やしたときの単体性能も必要。

配分損失が $1/K$ になる直感：最適点では、誤差が二乗で効く



① 指数を推定する

正則な推定では、誤差の規模は $1/\sqrt{K}$ （推定本数は K に比例）。

② その指数で配分を決める

最適点での傾きは 0。
近傍の損失はずれの二乗 $\rightarrow 1/K$ 。

上界 $O(1/K)$ + 識別困難な近接モデルによる局所下界 $\Omega(1/K)$

$\rightarrow$ 正則モデルで次数が一致。推定と配分の滑らかさ・曲率・モーメント制御が必要。

$1/K$ は「指数を知らずに配分する追加損失」の次数。MIP が K 倍速くなるという意味ではない。

理論の結論：本数の利得と、配分を学習する損失を定量化

① 本数を増やす価値

1本の探索量を固定すると、
最良値と到達限界の差が縮む。

$\zeta=1$ なら、本数 2 倍で差は約 $1/2$ 。

② 指数推定による配分の損失

正則モデルでは、指数既知の
最適配分に対する相対損失を評価。

$$R_K = \mathbb{E} \left[\frac{Q(\hat{\tau}; \zeta)}{Q(\tau^*; \zeta)} - 1 \right] = \Theta \left(\frac{1}{K} \right)$$

戦略への帰結：試す本数と、1本を続ける量を同時に配分する

総予算 $B = K\tau$ ：本数を増やすと、1本あたりの探索量は減る。

早期予測の実測も使い、「試す → 選別する → 残した探索へ集中する」と設計する。

理論は幅と探索量を配分する根拠。具体的な Cut 時刻や、Tool の性能保証まで導いたわけではない。



理論と実測を、Seed Race Tool の判断へどう取り込んだか

理論・実測からの根拠	コードで行う計算・判断	どこまで実装済みか
最良値を評価する ＝順序統計量	best_of_m：観測した n 本から m 本を選んだ最良値の期待値	解析関数として実装済み 全組合せ平均と一致
総資源固定で 本数とスレッド数を配分	t_star：各配分の期待最良値を 比較し、最小の配分を選ぶ	保存データから計算可能 自動 Cut とは独立
序盤の選別には 取り逃しの危険がある	序盤のばらつき＋上位集合の安定 → k 本に絞ってスレッド再配分	オンライン実装済み 閾値は経験的な設定

直接の応用：平均的な 1 本ではなく、「同時に走らせる m 本の最良値」で配分を比較。
初期 K・生存 k は設定値。↷推定から最適 Cut を求める機能はまだない。

順序統計量による配分評価は実装済み。オンラインの選別時刻は、別途検証する経験的な規則。

選別時刻 t を最適化する：締切 T で得る最良値を目的にする

固定する条件：問題・ソルバー・コア数 P ・締切 T / 決める変数：選別時刻 t

K 本 $\times P/K$ スレッド

切替費用 δ

k 本 $\times P/k$ スレッド

0

t

$t+\delta$

T

$$L^{(t)} = \min \left\{ B_t, \min_{i \in S_t} Y_i^{(t)}(T) \right\}, \quad S_t = \pi(H_t)$$

$$t^* \in \arg \min_{t \in \mathcal{D} \cup \{\text{noCut}\}} J(t), \quad J(t) = \mathbb{E}[L^{(t)}]$$

H_t : 時刻 t までの履歴 / S_t : その履歴だけで残す k 本 / B_t : 全候補で既に得た最良値

$Y_i^{(t)}(T)$: 候補 i を実際に増強・継続した締切時の品質 (小さいほど良い)

候補時刻集合 $\mathcal{D}$ と「選別しない」を比較。期待値は候補群の抽出・実行の変動に対して取る。

遅い選別は情報を増やすが、増強後の時間 $T-t-\delta$ を減らす。この両方を最終品質で評価する。

この最適化を解くために、どの情報が必要か

必要な情報	何に使うか	現状と不足
全候補の序盤履歴 H_t	各 t で、未来を見ずに どの候補を残せたかを再現	固定 2 スレッド： 121 問 × 16 本 増強実験にも自前の選別前ログ
各候補時刻での 増強後の結果 $Y^{(t)}$	選別を早める／遅らせる 効果を同じ締切で比較	2→8 実測： 11 問 × 3 群 × 4 本 = 132 本 同一候補群 × 複数 Cut は未整備
実時間・切替費用 δ 同時実行条件	残り時間・再開損失・競合を 最終品質に含める	Work・Cut ログはある 壁時計と実際の再配分条件を照合
独立候補群の反復 固定した評価基準	期待最良値と不確かさを推定 未使用群で選択結果を検証	4 候補 $\neq$ 4 回のレース 指標・未解処理・比較条件を固定

必要なのは「同じ候補群を、各候補時刻で増強したらどうなるか」。現データだけで最適 t は断定できない。

オフライン：過去データで候補時刻を比較し、固定方策を選ぶ

$$\hat{J}(t) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R L_r^{(t)}, \quad \hat{t} \in \arg \min_t \hat{J}(t)$$

① 比較する

各候補群 r で、候補時刻 t ごとの実際の最終最良値を取る。
増強条件・総コア数・締切をそろえ、選別なしも含める。

② 時刻を選ぶ

学習用の候補群で平均損失 $\hat{J}(t)$ を比較し、最小の時刻を選ぶ。
各レースの未来を見て「その回の最適 t 」を選ぶ評価はしない。

③ 未使用群で検証

選んだ時刻と現行自動 Cut を、独立した候補群で比較する。
候補群単位の区間推定。未知問題への一般化は問題単位でも分割。

履歴依存の自動化：今選別する期待損失と、もう少し観測してから決める期待損失を比較。
極値統計は「増強後の最良値」の予測を補助するが、条件付き分布・時間応答の推定も必要。

現行自動 Cut はばらつき・順位安定を使う規則。提案した $J(t)$ の最小化／最適停止は未実装。



オンライン：履歴から「今切る／待つ」を決める

観測時刻 $t_0 < \dots < t_m = T$ 。履歴 h には、残り時間・全候補の履歴・既得の最良値を含める。
 $C_j(h)$ は今選別する場合、 $V_j(h)$ は今後も判断を続ける場合の最小期待損失。

$$C_j(h) = \mathbb{E}[L^{(t_j)} \mid H_j = h, \text{ cut now}]$$

$$V_j(h) = \min\{C_j(h), \mathbb{E}[V_{j+1}(H_{j+1}) \mid H_j = h, \text{ wait}]\}$$

左が小さければ今選別、右が小さければ観測を続ける。締切では $V_m(h) = B_T$ 。
必要なモデル①：今の履歴から、選別・増強後の最終値を予測する条件付き分布
必要なモデル②：選別せず待つと、次の履歴がどう変わるかという遷移分布
選別規則 π と本数 K, k は固定。過去の履歴のみで決め、未来の実測値は参照しない。

MIT OCW：最適停止の枠組み ↗ (有限締切への定式化は本発表の提案)

事前データなしの初回は最適化できない。保守的な既定則で走り、全履歴を保存して次回以降に更新する。

自動選別時刻：ばらつきと順位の安定で決める

Work の区切りで観測し、序盤のばらつきで「どれだけ待つか」を変える。

ばらつき = 暫定解の標本 SD / $\max(|\text{平均}|, 1)$ 。以下は `--cut detect` の既定設定。

小：0.02 未満

最初の分類時点で
選別を決める。

中：0.02 ～ 0.5 未満

上位候補が直近 3 回の
有効観測で安定したら選別。

大：0.5 以上

確認を 1 回増やし、
直近 4 回で安定したら選別。

探索量の上限に達したら選別を決定。次の Work 区切りで k 本へ絞り、資源を移す。
上位集合の安定は、境界付近のほぼ同等な候補の入替を許す。

順位安定ルートでは先頭 MIPGap $\geq 99\%$ なら保留。低ばらつき・上限到達は別分岐。詳細はノート。

自動化したのは観測に基づく停止規則。「最適な選別時刻」を推定する機能ではない。

使い方：モデルと資源条件、選別方法を指定する

```
seed-race model.mps.gz --cores 32 --seeds 8 \
--survivors 2 --time 3600 --cut detect --plot --watch
```

指定方法	設定例	選別の判断
自動（推奨例）	--cut detect	ばらつき＋上位集合の安定
手動・ 1 回	--cut 800	指定 Work 境界に基づいて選別
手動・ 段階的	--stage 800:4 --stage 1600:2	8 本 → 4 本 → 2 本

Work = ソルバーが報告する計算作業量。実秒とは別。段階指定は --cut detect の代わりに指定する。

総コア数は固定し、各段階で「残す本数 × 1 本のスレッド数」を変える。

内部の動作：共通の Work 区切りで比較し、残した探索を再開

記録

各シードの暫定解・下界を
Work の区切りごとに保存



比較・選別

同じ区切りで順位を比較
判断は次の区切りで適用



資源を増やして再開

残したモデルの状態を保持
スレッド数を変更して続行

再検証できること

保存した Work 系列から、
どこで誰を残す判断だったかを再計算。

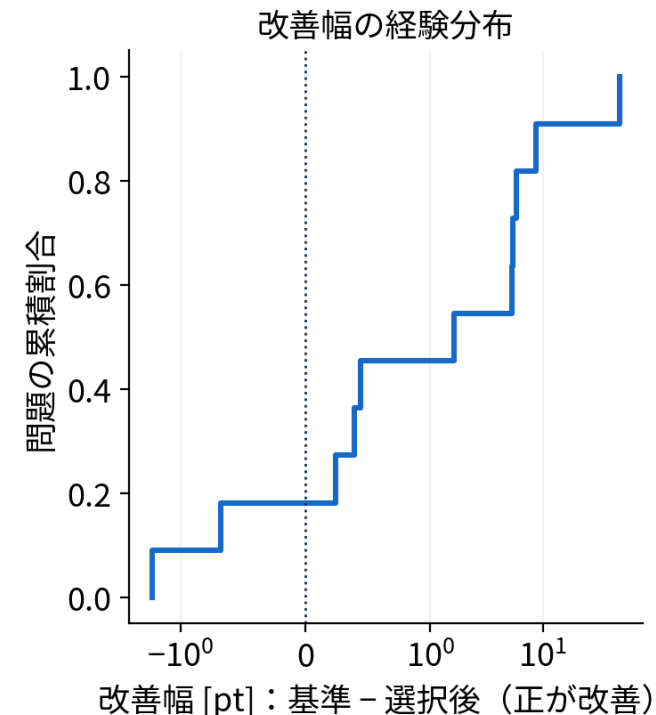
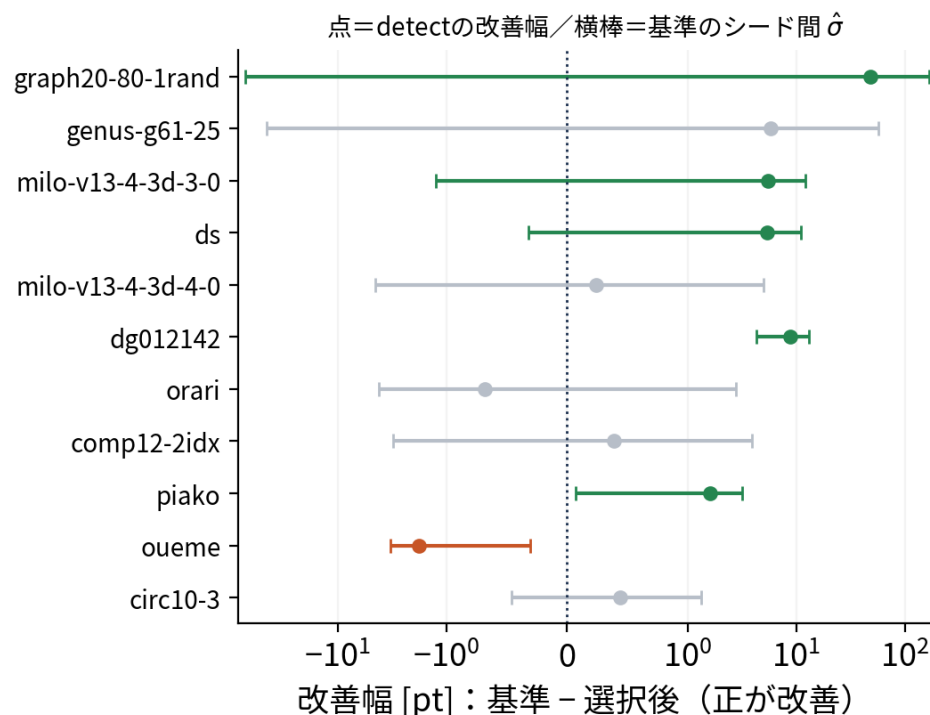
別途評価すること

停止・再開やスレッド変更の影響。
壁時計の性能は判断の再現性と別。

探索木はシードごとに独立。状態を保って再開しても、探索の進み方が変わる場合がある。

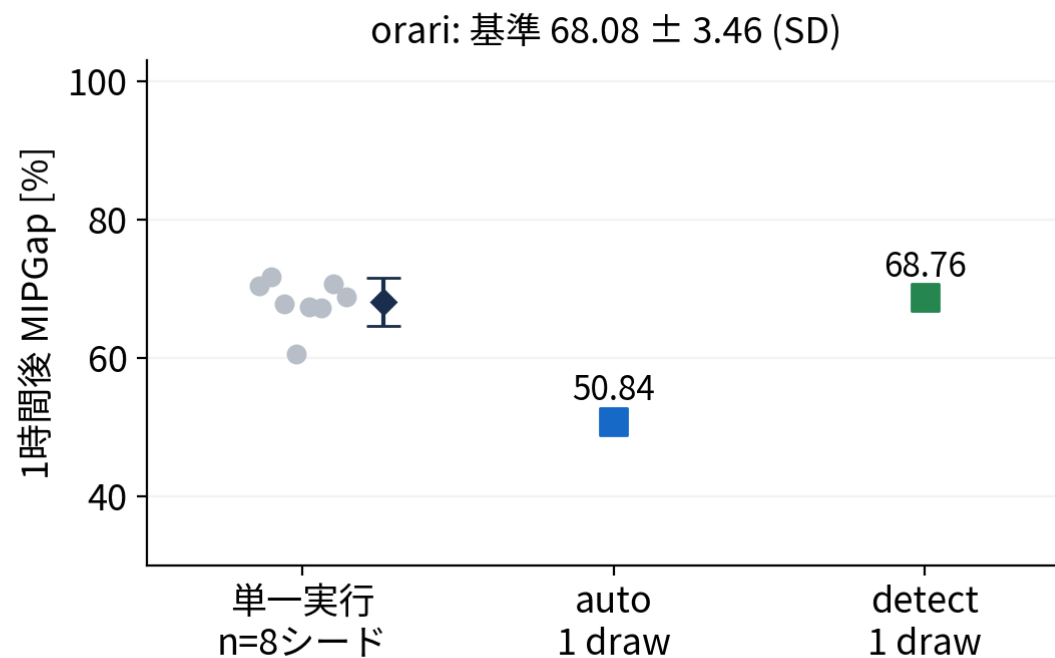
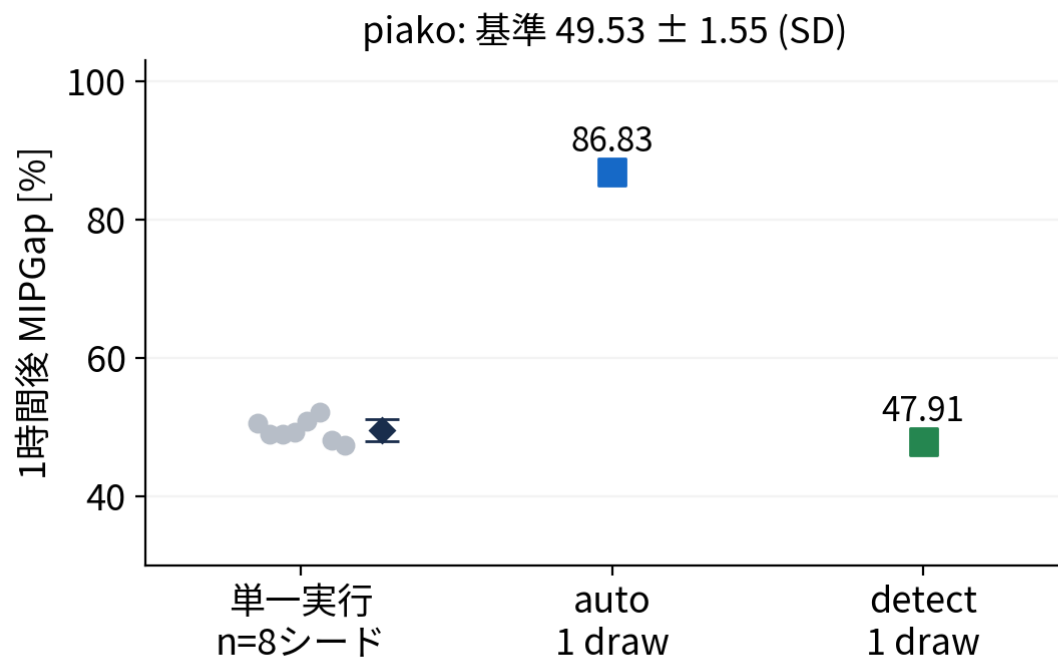
8 コアの実測：勝敗数に加え、改善幅と基準の散らばりを見る

全 27 問：5 改善・21 同等・1 悪化 / 以下はばらつき大 11 問の全結果



横棒は基準 8 シードの SD（効果の信頼区間ではない）。detect は各問 1 実行、13 問は異機種比較。

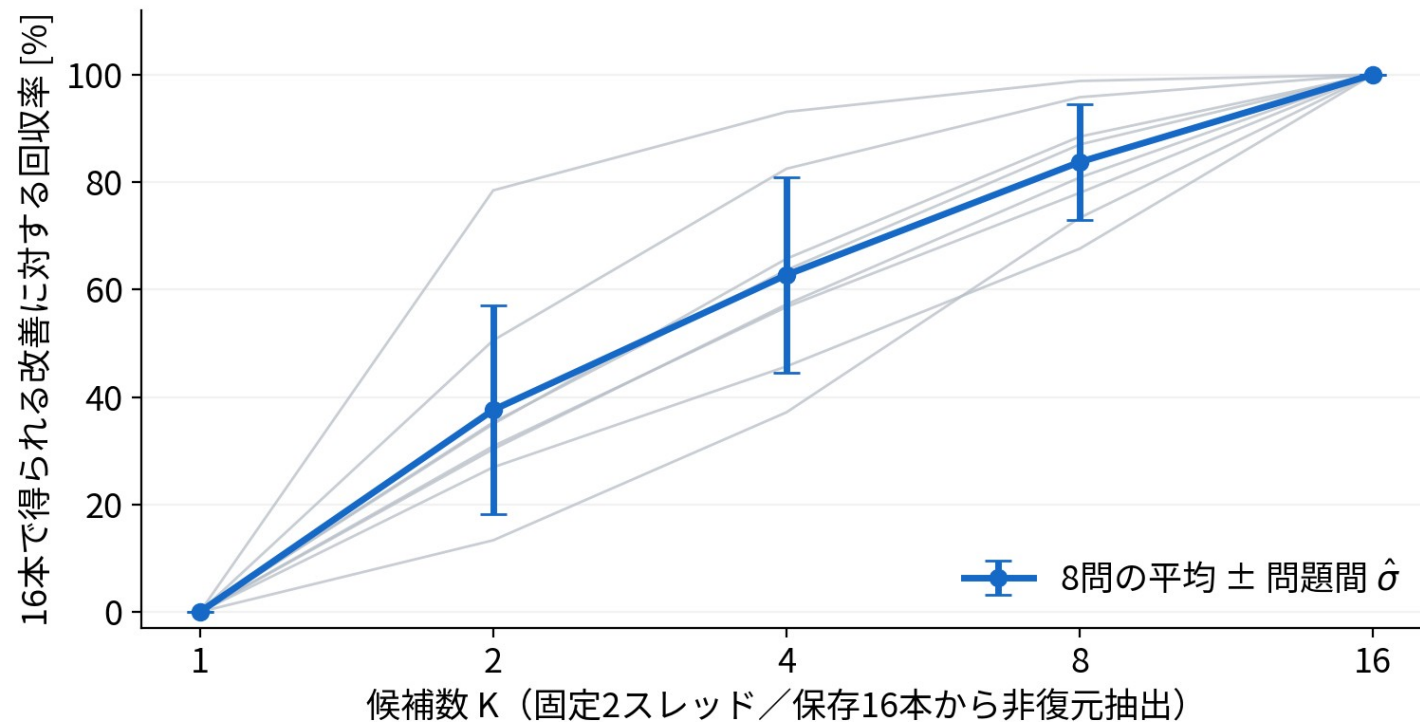
遅い選別が救う例と悪化する例：基準の 8 シードも全点表示



piako : 選別 720 → 880 Work / orari : 720 → 800 Work (残すシードも変化)

auto ・ detect の四角は各 1 回の結果。探索候補の本数を、独立した反復数とは数えない。

候補数の価値：4本・8本・16本を、問題別の分布で比べる



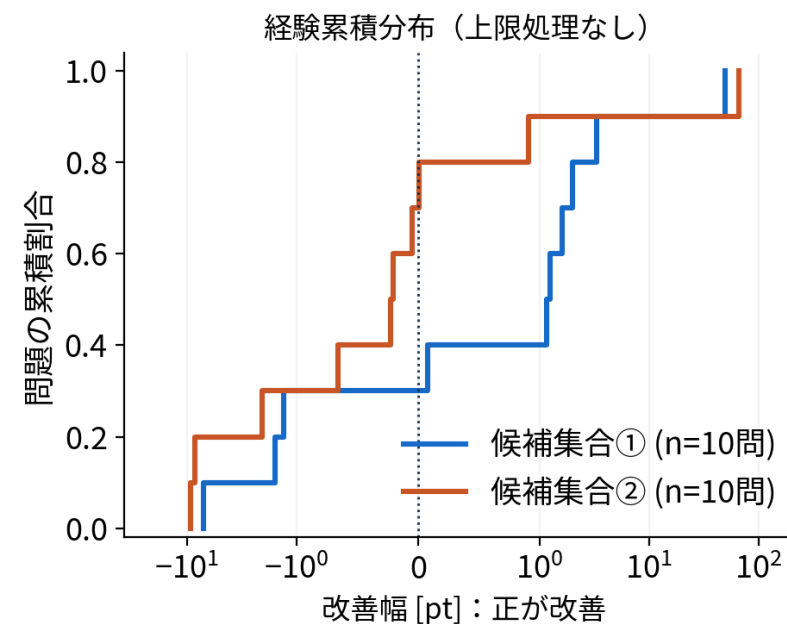
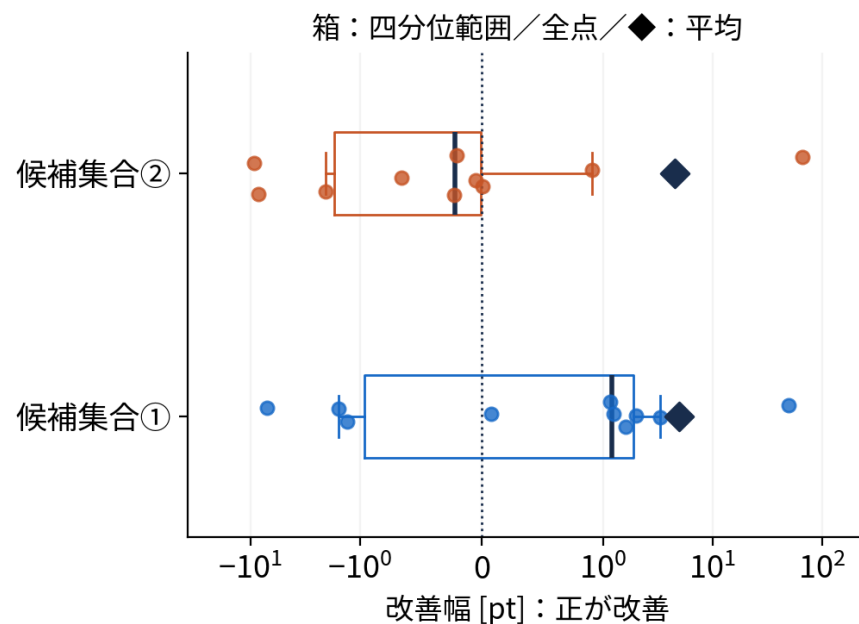
候補数 K	回収率：平均 $\pm$ SD
1	0.0 $\pm$ 0.0%
2	37.6 $\pm$ 19.5%
4	62.7 $\pm$ 18.2%
8	83.7 $\pm$ 10.8%
16	100.0 $\pm$ 0.0%

各 K とも n=8 問。

灰線は各問題、青棒は問題間 SD。

幅を増やす利得はあるが、問題差もある。増強・選別の効果とは分離して評価する。

32 コア : 平均の改善だけでは、候補集合の安定性は言えない



候補集合 / n	平均 $\pm$ SD [pt]	中央値 [pt]	平均の 95% 区間
1 / 10 問	4.92 $\pm$ 16.00	1.20	[-1.48, 15.57]
2 / 10 問	4.56 $\pm$ 21.77	-0.21	[-3.96, 18.90]

集合① 5/3/2、集合② 1/6/3。同じ 10 問・基準を共有。どちらも平均の 95% 区間は 0 を含む。

実装上の限界：停止・再開にも性能への影響がある

orari：同じ 8 シード	平均 MIPGap	最良 MIPGap
中断なし	62.8%	42.8%
Work 刻みで停止・再開	68.0%	59.8%

この対照は既存の平均・最良値の集計。対応する両群の個票を未照合のため、SD は未掲載。

状態を保持した再開でも、中断なしと同じ軌跡とは限らない。
候補数の利得・選別の損失・資源増強・停止再開の影響を、別々に検証する。

観測された悪化は報告する。原因となる内部機構は、別の検証課題として残す。



結論：複数候補を試し、観測で選別し、継続へ資源を移す

理論の結論

複数本の最良値と、指数推定による配分損失を定量化。

総予算一定では「試す本数」と「1本への探索量」を同時に考える。

採用する戦略

序盤に複数候補を試す → ばらつき・順位安定で選別 → 残した探索に集中。

全問を同じ時刻に切らず、早切りの取り逃しと継続時間を両方見る。

Tool で実装・検証したこと

選別とスレッド再配分を自動化。8コア全27問では5改善・21同等・1悪化。

「最適 Cut の計算」ではなく、観測に基づく方策として有効性と限界を報告。

次の検証：複数 Cut の増強後データと未使用シードで、選別時刻の判断を評価する。

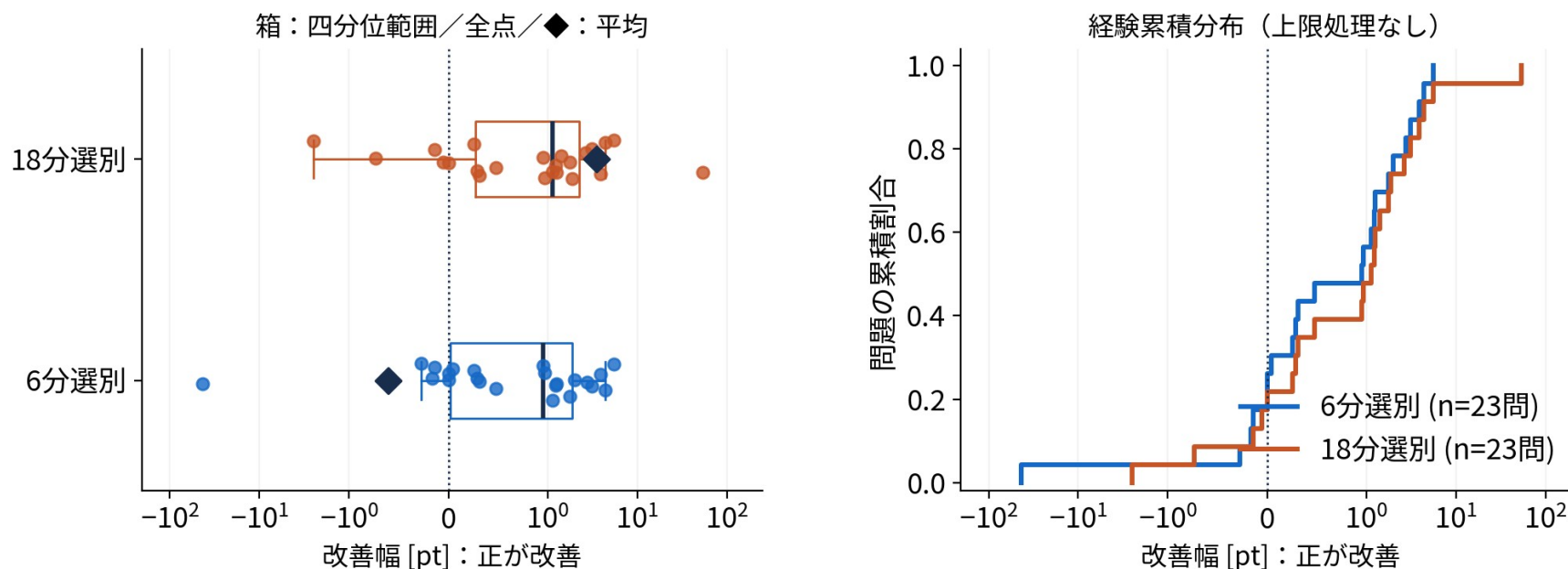
σ・標本数・信頼区間を、何のばらつきかで区別する

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \text{SE}(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

表示対象	標本単位と意味
シード間の SD	同じ問題・条件の 16 本（実機基準では 8 本または 4 本）の結果の散らばり
改善幅の SD	23 問／ 10 問などの問題間の効果の散らばり。シードを全問まとめない
平均の 95% 区間	問題を単位に 20,000 回再標本化。選択済み集合に条件付けた区間
1 draw の実機結果	その候補集合で 1 回の Racing。内部の 4 候補・ 8 候補は反復数ではない
品質指標	保存軌跡：参照値との差 ／ 実機比較： MIPGap。分母が違うため区別

SD は結果の散らばり、SE は平均の推定誤差。 ±SD を 95% 信頼区間とは呼ばない。

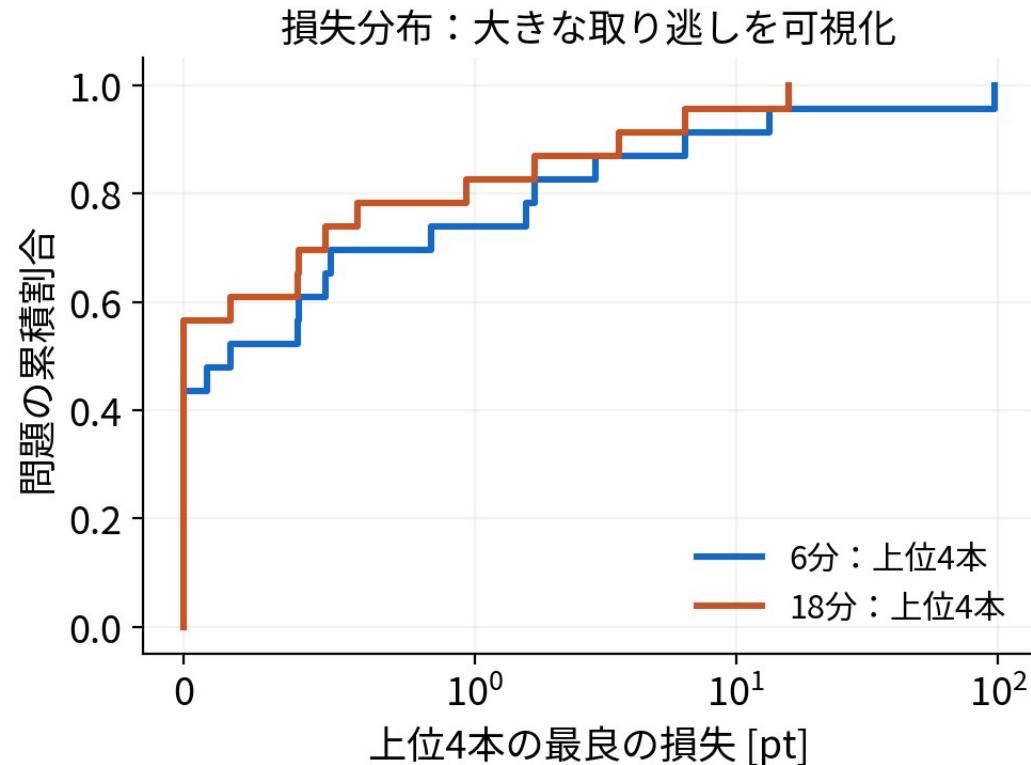
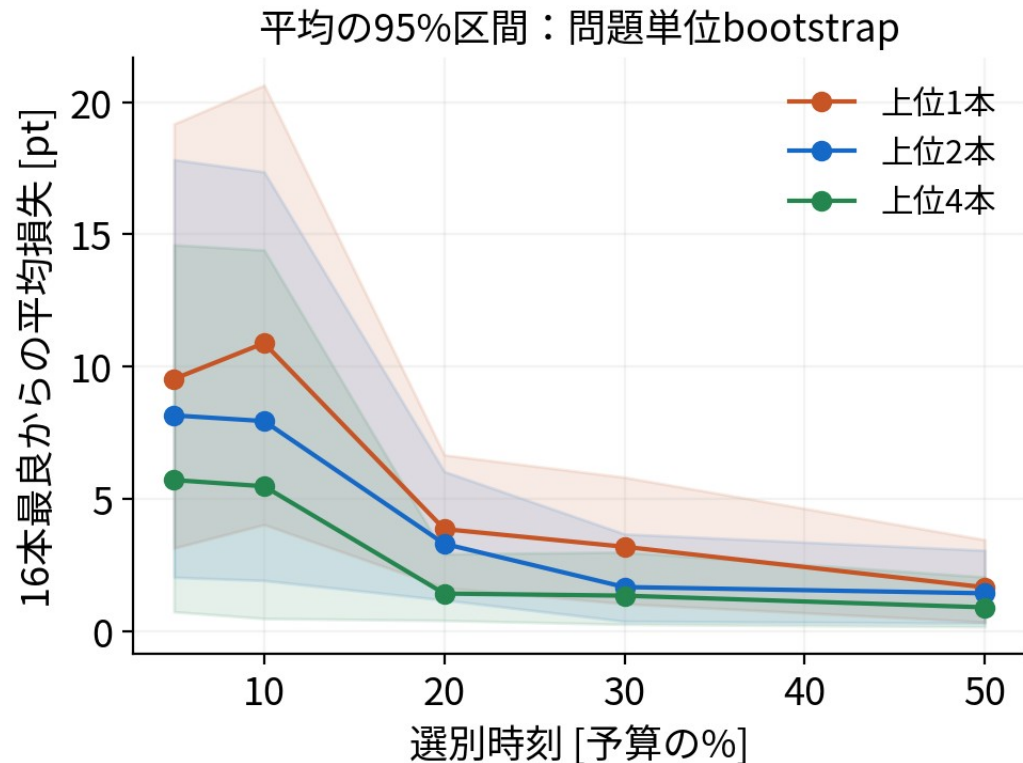
4本の最良値：早切りの大きな損失が平均を反転させる



選別時刻 / n	平均 ± SD [pt]	中央値 [四分位範囲]	平均の 95% 区間
6 分 / 23 問	-0.60 ± 9.51	0.96 [0.02, 1.87]	[-4.85, 1.87]
18 分 / 23 問	3.54 ± 10.99	1.14 [0.27, 2.24]	[0.74, 8.43]

6分：中央値は +0.96 pt でも、平均は -0.60 pt。大きな取り逃しを分布から確認する。

選別時刻と損失：平均の不確実性と裾を表示



平均損失が小さくなる時刻と、大きな損失が残る頻度を併せて見る。

2→8 スレッドの全候補増強：132 本が取得済み

11 問 × 3 組 × 4 シード = 132 本（各 60 分）

全 132 本で 2→8 増強。最終暫定解は 131 本で取得（1 本は未取得）。

照合項目	件数	解釈
全候補の 2→8 増強を確認	33 / 33 組	増強後成績は取得済み
比較元と候補集合が不一致	22 / 33 組	元の選別の再現評価には使わない
記載 Cut と実際の Cut が不一致	33 / 33 組	実際の適用は記載値より 80 Work 後

使える範囲：実際の Cut ・同じ組の選別前指標と増強後成績を対応付ける。
異なる Cut を一つの 12 シード標本として混ぜない。

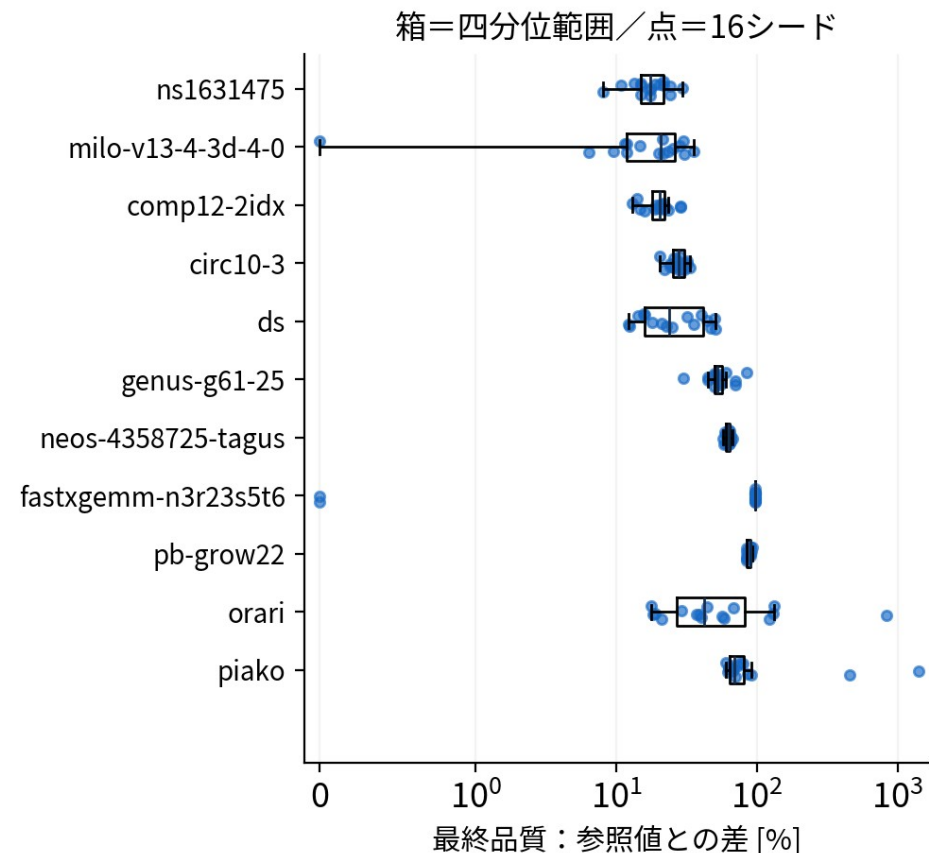
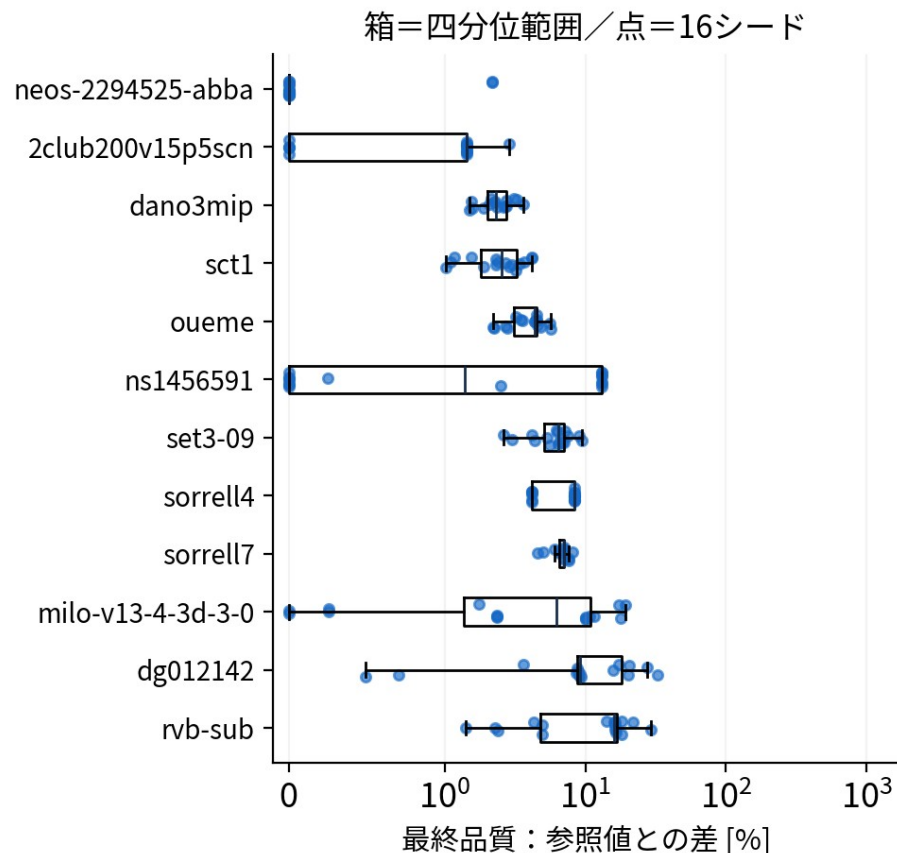
「増強データがある」ことと、「同条件で元の選別を再現できた」ことを区別する。

32 コアの全 10 問：基準 4 シードの SD を併記

問題	基準：平均 $\pm$ SD (n=4)	自動① / 1 draw	自動② / 1 draw
circ10-3	52.67 $\pm$ 1.35	54.25	53.33
comp12-2idx	45.89 $\pm$ 2.90	44.65	45.89
dg012142	12.37 $\pm$ 1.55	13.68	12.41
ds	7.87 $\pm$ 3.22	6.26	8.08
genus-g61-25	172.79 $\pm$ 34.54	123.08	107.14
milo-v13-4-3d-3-0	25.78 $\pm$ 1.28	24.61	35.09
milo-v13-4-3d-4-0	45.22 $\pm$ 4.50	41.88	47.26
orari	56.04 $\pm$ 12.65	63.09	64.53
oueme	10.98 $\pm$ 0.49	9.00	11.21
piako	49.91 $\pm$ 0.85	49.83	49.00

単位：1 時間後 MIPGap [%]。小さいほど良い。各自動結果は、候補集合ごとの単一結果。

重点解析 23 問の、各 16 シードの実測分布



全 23 問を表示。共通横軸は 1% 超で対数。最終差で抽出した集合であり、全 121 問ではない。

品質側の配分後悔：正則モデルでの上界と下界

上界：推定誤差が二次で効く

$$\begin{aligned}\hat{\zeta} - \zeta &= O_{\mathbb{P}}(K^{-1/2}), \\ Q(\hat{\tau}; \zeta) - Q(\tau^*; \zeta) &\approx \frac{1}{2} Q_{\tau\tau}(\tau^*; \zeta) (\hat{\tau} - \tau^*)^2, \\ R_K &= O(K^{-1}).\end{aligned}$$

一次の変動が消える最適配分近傍で、
推定誤差の二乗が損失に現れる。
期待値の次数にはモーメント制御も必要。

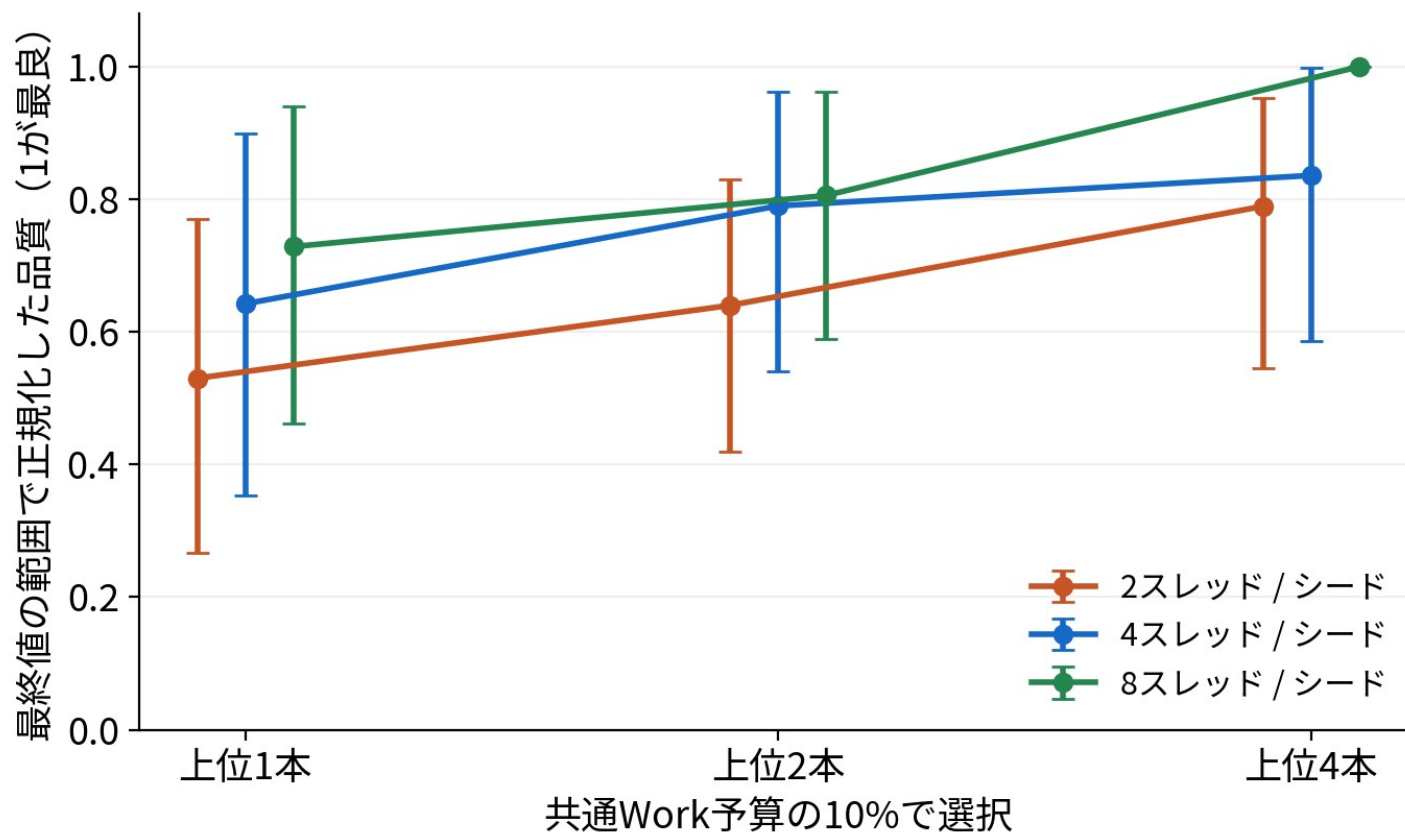
下界：識別困難な近接 2 点

$$\begin{aligned}|\zeta_1 - \zeta_0| &\asymp K^{-1/2}, \\ \inf_{\hat{\tau}} \sup_{j \in \{0,1\}} \mathbb{E}_{\zeta_j} \left[\frac{Q(\hat{\tau}; \zeta_j)}{Q(\tau_j^*; \zeta_j)} - 1 \right] &\geq \frac{c}{K}, \quad c > 0.\end{aligned}$$

Le Cam の二点法で局所的な下限。
滑らかさ・非退化性を仮定し、
有限下端という条件だけでは足りない。

品質側の正則モデルについての次数。任意の MIP ・ 有限 16 シードへの一律保証ではない。

追加解析： Work 基準で上位集合を評価する



誤差棒：問題単位の 95% 区間

8 問の小標本。
スレッド群ごとに別の実行。

2→8 への切替実験ではない。

先行研究と本発表の位置づけ

Lodi & Tramontani (2013) — Performance variability in mixed-integer programming.

Fischetti & Monaci (2014) — Exploiting erraticism in search. Operations Research 62.

Achterberg & Wunderling (2013) — MIP: Analyzing 12 years of progress.

de Haan & Ferreira (2006) — Extreme Value Theory: An Introduction.

Carpentier & Valko (2014) — Extreme bandits. NeurIPS.

Nishihara, Lopez-Paz & Bottou (2016) — No regret bound for extreme bandits. AISTATS.

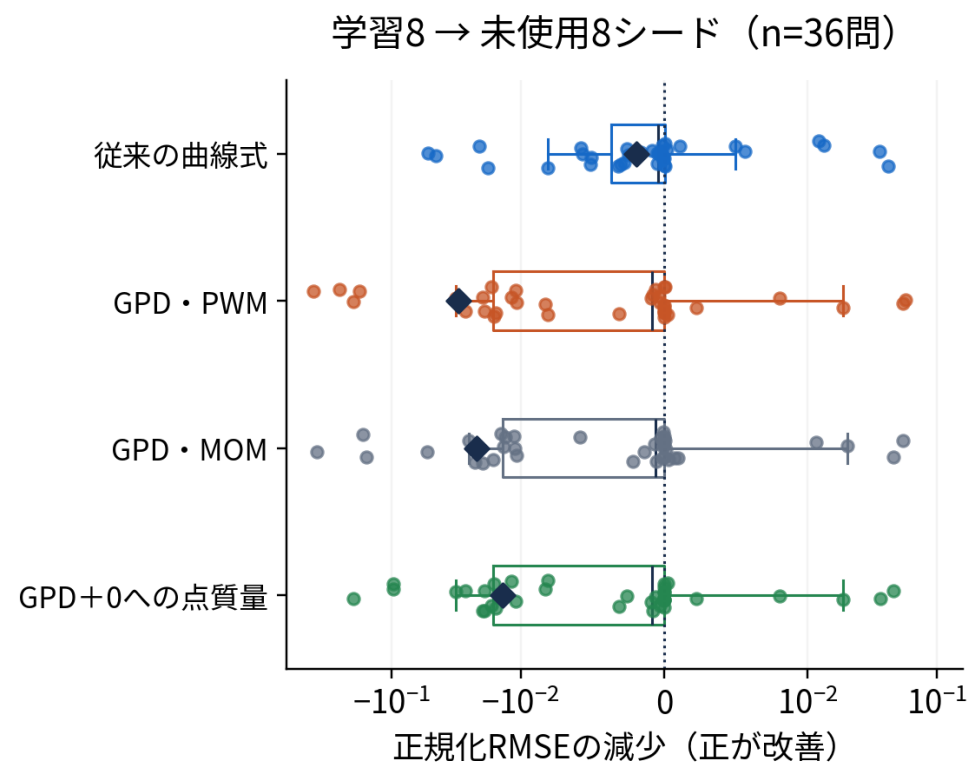
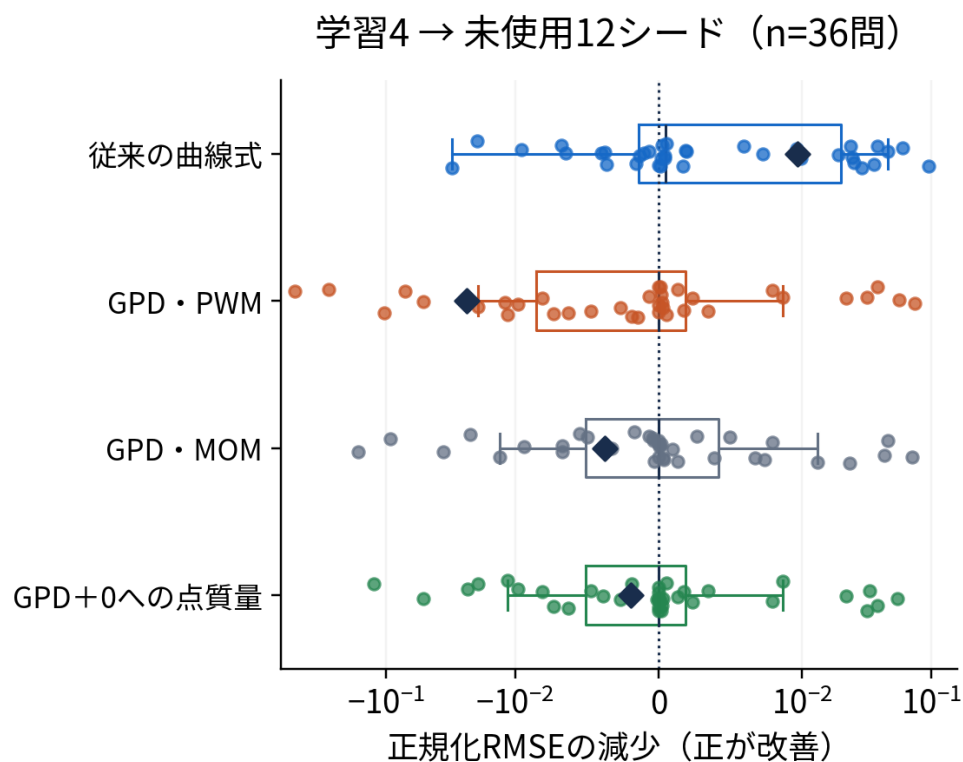
本発表の焦点：極値指数・配分理論・小標本の限界・選別と資源増強の統計。

全取得数・有効データ数・重点解析数の対応

ソルバー・集合	取得規模	解析時の内訳
Gurobi : 全取得	121 問 × 16 本 = 1,936 実行	有効な暫定解軌跡なし : 6 問
Gurobi : 一部有効	supportcase19 : 16 本取得	有効 9 本。16 本の選別解析から除外
Gurobi : 全 16 本有効	114 問	分布を全て表示 / 重点選別解析は 23 問
SCIP	44 問 × 8 本 = 352 実行	全 8 本で有限最終値 : 21 問
HiGHS	44 問 × 8 本 = 352 実行	全 8 本で有限最終値 : 23 問

SCIP・HiGHS は別条件での観測。スレッド増強の実装・実測まで共通と主張しない。

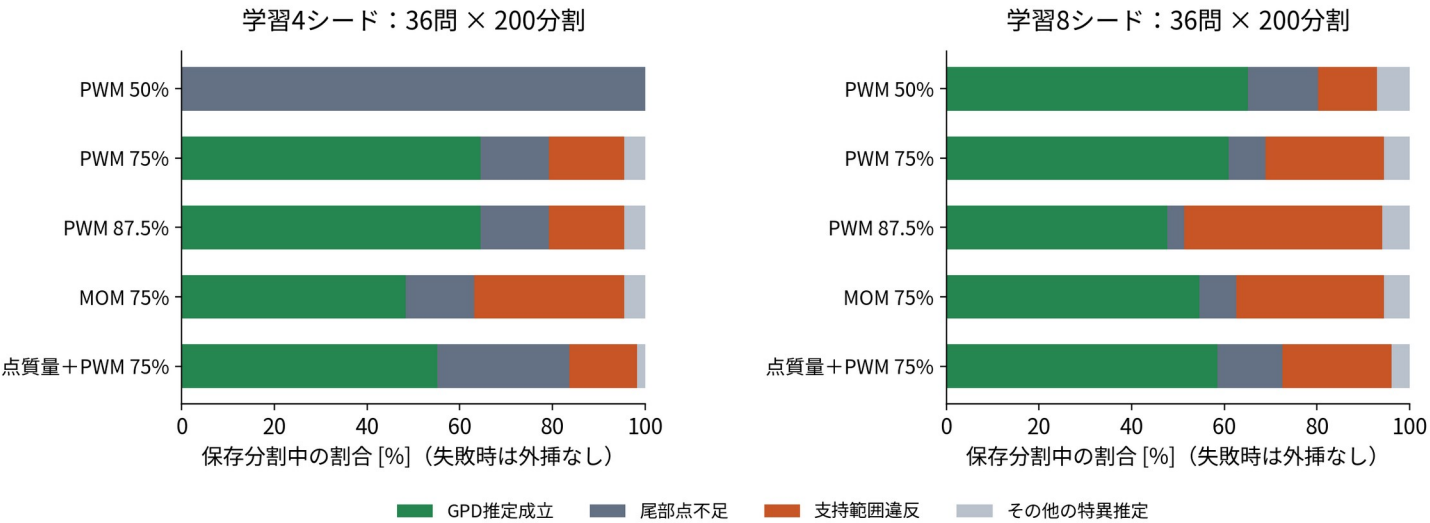
GPD 予測の比較：平均だけでなく全 36 問の差を見る



GPD-PWM 改善幅の 95% 区間：4→12 $[-0.0604, +0.0026]$ / 8→8 $[-0.0620, -0.0055]$

正規化 RMSE の差で、時間短縮率や Seed Racing の勝率ではない。比較は品質側のみ。

閾値と推定法：成立しない推定も分母から除かない



GPD 設定	4→12 RMSE	8→8 RMSE	成立率 4 / 8
PWM ・ 50%	0.1961	0.1503	0.0% / 65.0%
PWM ・ 75% (主)	0.2198	0.1536	64.5% / 60.9%
PWM ・ 87.5%	0.2198	0.1519	64.5% / 47.8%
MOM ・ 75%	0.1998	0.1453	48.3% / 54.6%
点質量 + PWM ・ 75%	0.1980	0.1369	55.2% / 58.6%

失敗例は「外挿なし」に戻して採点。支持範囲違反を、観測データの削除で解消しない。

有限の下端だけでは、連続べき乗の極値則は決まらない

反例①：下端は有限、接近は別の速さ

$$F_A(x) = \exp(-1/x), \quad x > 0,$$

$$F_A^{-1}(1/K) = \frac{1}{\log K}.$$

0 という下端があっても、
最小値の代表的なスケールは
K のべき乗とは限らない。

反例②：下端へ到達する確率が正

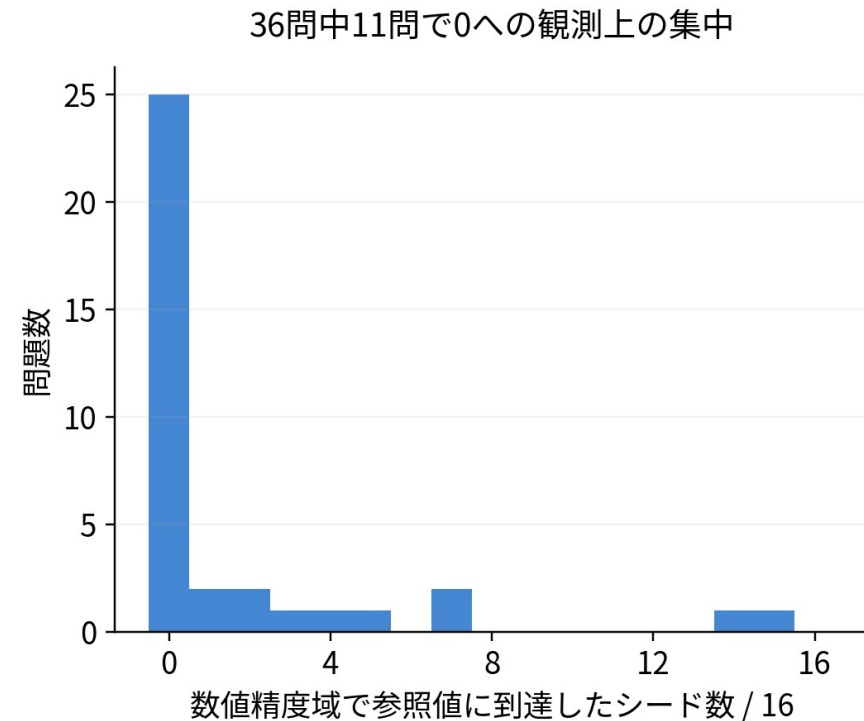
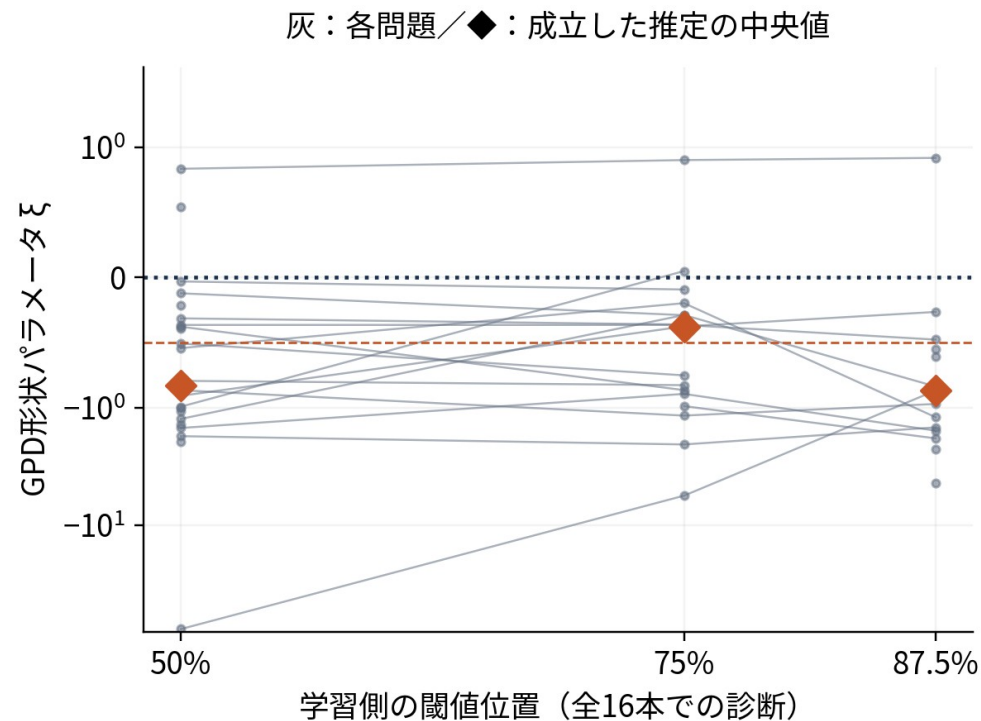
$$p_* = \Pr(A = a_*) > 0,$$

$$\Pr(M_K > a_*) = (1 - p_*)^K.$$

最適値等への到達を含むときは、
「到達する確率」と
「未到達の連続裾」を分けて考える。

訂正するのは適用条件。「有限の下端 → 必ず Weibull 型」「指数的な項は排除」は主張しない。

実測にも、閾値感度・同値・参照値近傍への集中がある



橙◆：成立した推定の中央値／橙破線： $\xi=-1/2$ 。0への集中は計測精度を含む観測上のもの。

36 問中 11 問に参照値近傍の観測、19 問に同値。連続分布の形だけで判断を終えない。

121 問すべての軌跡：公開問題と open 区分を区別する

公式区分	問題数	意味（公開／非公開の区分ではない）
easy / v18	74	公式条件で 1 時間以内に解決したと報告された問題
hard / v30	18	解決済みだが、より長時間等を要した問題
open / v29	29	解決がまだ報告されていない問題

121 問すべて公開 MIPLIB 問題。軌跡は本研究で取得した 16 シードの実測。

青・実線＝Primal / 橙・破線＝Dual。同じグラフに重ねる。細線＝各シード、太線＝平均。
P / D は有限値のある本数。平均も各々の固定群で計算。Primal なし 6 問を除外しない。
時間軸は最も遅い終了まで。縦軸は参照差（MIPGap ではない）。必要時は対数表示。
OPT は今回のソルバーログの終了状態（許容差内）。MIPLIB の公式区分とは別。

公開データとしては 121/121 問。その中に、MIPLIB の open（未解決）区分が 29 問含まれる。

121 問の問題名索引 1/3

問題名 区分 ページ

001 2club200v15p5scn [hard] p.61
002 8div-n59k10 [hard] p.61
003 8div-n59k11 [hard] p.61
004 bab2 [hard] p.61
005 berlin_5_8_0 [easy] p.62
006 binkar10_1 [easy] p.62
007 bppc4-08 [easy] p.62
008 bppc6-02 [hard] p.62
009 bppc8-02 [easy] p.63
010 circ10-3 [open] p.63
011 cmflsp40-24-10-7 [easy] p.63
012 co-100 [easy] p.63
013 cod105 [easy] p.64
014 comp12-2idx [open] p.64
015 cvs16r106-72 [easy] p.64

問題名 区分 ページ

016 cvs16r128-89 [easy] p.64
017 dano3mip [open] p.65
018 dg012142 [hard] p.65
019 ds [hard] p.65
020 enlight_hard [easy] p.65
021 fastxgemm-n2r7s4t1 [easy] p.66
022 fastxgemm-n3r23s5t6 [open] p.66
023 genus-g61-25 [open] p.66
024 ger50-17-trans-pop-3t [open] p.66
025 glass-sc [easy] p.67
026 glass4 [easy] p.67
027 gmu-35-40 [easy] p.67
028 gmu-35-50 [easy] p.67
029 gmut-76-50 [open] p.68
030 graph20-80-1rand [hard] p.68

問題名 区分 ページ

031 hgms-det [hard] p.68
032 hgms30 [open] p.68
033 markshare2 [hard] p.69
034 markshare_4_0 [easy] p.69
035 milo-v13-4-3d-3-0 [hard] p.69
036 milo-v13-4-3d-4-0 [open] p.69
037 mzzv11 [easy] p.70
038 n3div36 [easy] p.70
039 neos-1420546 [open] p.70
040 neos-2294525-abba [easy] p.70
041 neos-2624317-amur [easy] p.71
042 neos-2657525-crna [easy] p.71
043 neos-2978205-isar [open] p.71
044 neos-3009394-lami [open] p.71
045 neos-3024952-loue [easy] p.72

open を橙で表示。公式区分（2026-01-26 版）と、今回の 16 シードの終了状態を区別する。

121 問の問題名索引 2/3

問題名 区分 ページ

046 neos-3045796-mogo [easy] p.72
047 neos-3046615-murg [easy] p.72
048 neos-3075395-nile [easy] p.72
049 neos-3083819-nubu [easy] p.73
050 neos-3214367-sovi [hard] p.73
051 neos-3216931-puriri [easy] p.73
052 neos-3322547-alsek [hard] p.73
053 neos-3402294-bobin [easy] p.74
054 neos-3426085-ticino [easy] p.74
055 neos-3530903-gauja [easy] p.74
056 neos-3555904-turama [easy] p.74
057 neos-3594536-henty [open] p.75
058 neos-3610040-iskar [easy] p.75
059 neos-3656078-kumeu [easy] p.75
060 neos-3691541-lonja [open] p.75

問題名 区分 ページ

061 neos-3754224-navua [open] p.76
062 neos-3754480-nidda [easy] p.76
063 neos-4230265-orari [open] p.76
064 neos-4264598-oueme [open] p.76
065 neos-4292145-piako [open] p.77
066 neos-4300652-rahue [easy] p.77
067 neos-4333464-siret [easy] p.77
068 neos-4338804-snowy [easy] p.77
069 neos-4358725-tagus [open] p.78
070 neos-4387871-tavua [easy] p.78
071 neos-4647030-tutaki [hard] p.78
072 neos-5041822-cockle [open] p.78
073 neos-5049753-cuanza [easy] p.79
074 neos-5052403-cygnnet [easy] p.79
075 neos-5093327-huahum [easy] p.79

問題名 区分 ページ

076 neos-5104907-jarama [easy] p.79
077 neos-5114902-kasavu [easy] p.80
078 neos-5188808-nattai [easy] p.80
079 neos-5193246-nerang [easy] p.80
080 neos-5196530-nuhaka [hard] p.80
081 neos-911970 [easy] p.81
082 ns1456591 [open] p.81
083 ns1631475 [open] p.81
084 ns1830653 [easy] p.81
085 pb-grow22 [open] p.82
086 physiciansched6-2 [easy] p.82
087 rail01 [easy] p.82
088 rail02 [easy] p.82
089 rail507 [easy] p.83
090 ran14x18-disj-8 [easy] p.83

open を橙で表示。公式区分（2026-01-26 版）と、今回の 16 シードの終了状態を区別する。

121 問の問題名索引 3/3

問題名 区分 ページ

091 reblock115 [easy] p.83
092 reblock166 [easy] p.83
093 reblock354 [hard] p.84
094 reblock420 [easy] p.84
095 rvb-sub [hard] p.84
096 sct1 [open] p.84
097 sct2 [easy] p.85
098 sct5 [open] p.85
099 set3-09 [open] p.85
100 seymour [easy] p.85
101 seymour1 [easy] p.86
102 sorrell3 [easy] p.86
103 sorrell4 [hard] p.86
104 sorrell7 [open] p.86
105 supportcase10 [easy] p.87

問題名 区分 ページ

106 supportcase16 [easy] p.87
107 supportcase18 [easy] p.87
108 supportcase19 [easy] p.87
109 supportcase22 [open] p.88
110 supportcase26 [easy] p.88
111 supportcase33 [easy] p.88
112 supportcase37 [easy] p.88
113 supportcase40 [easy] p.89
114 supportcase6 [easy] p.89
115 supportcase7 [easy] p.89
116 toll-like [easy] p.89
117 traininstance2 [easy] p.90
118 traininstance6 [easy] p.90
119 uccase10 [open] p.90
120 uccase7 [easy] p.90

問題名 区分 ページ

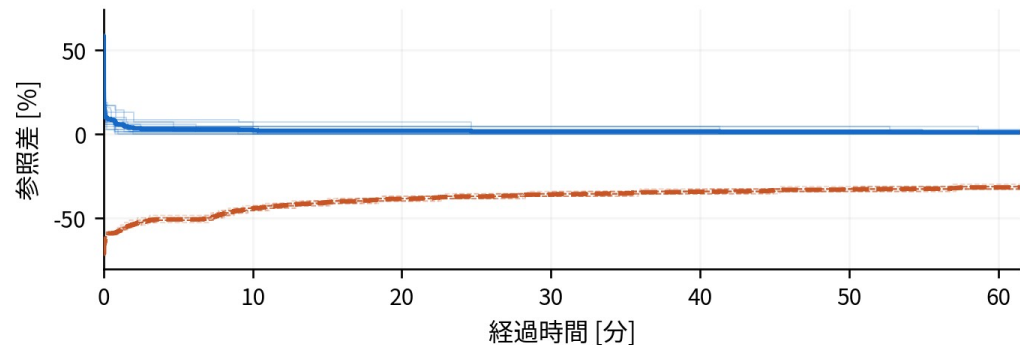
121 uccase8 [easy] p.91

open を橙で表示。公式区分（2026-01-26 版）と、今回の 16 シードの終了状態を区別する。

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 1/31

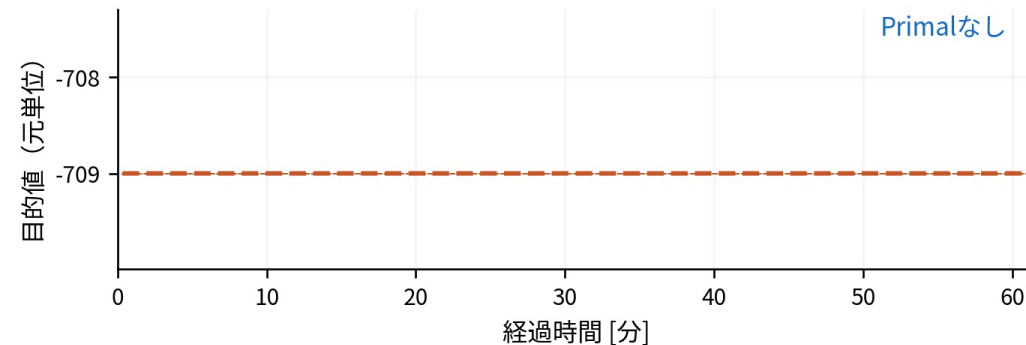
001 2club200v15p5scn [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



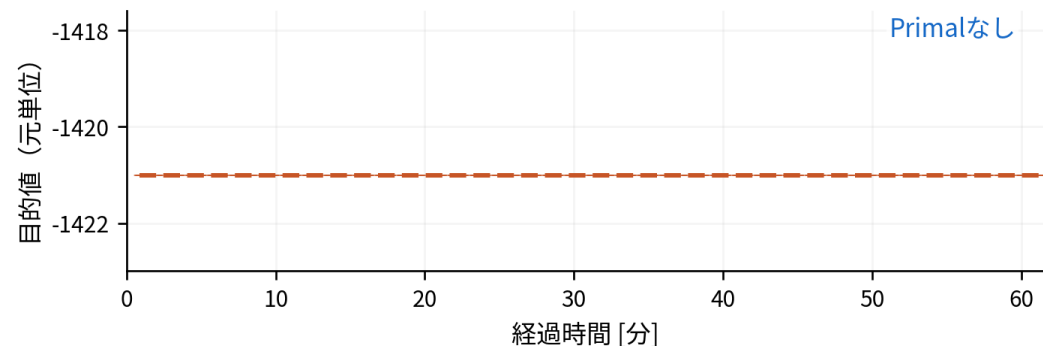
002 8div-n59k10 [hard]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



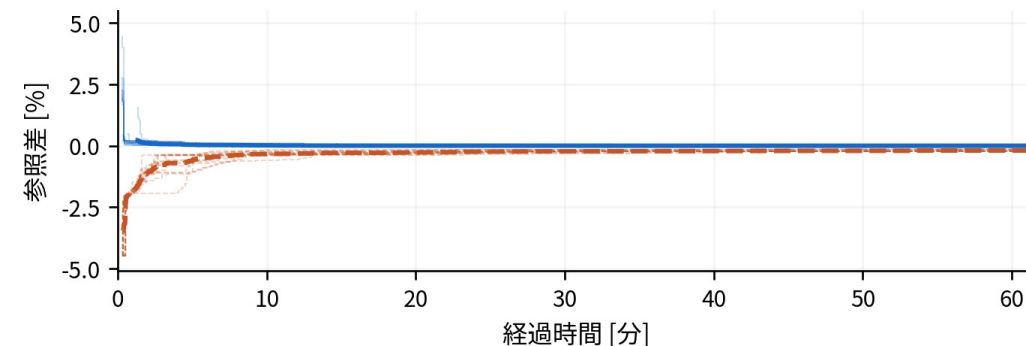
003 8div-n59k11 [hard]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



004 bab2 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



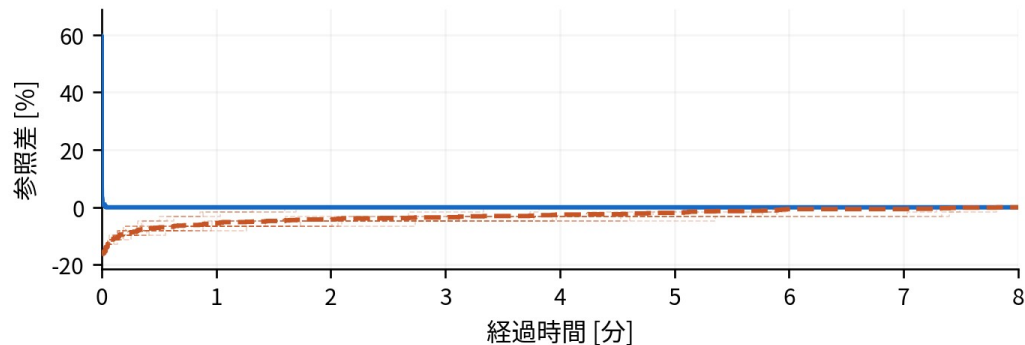
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 2/31

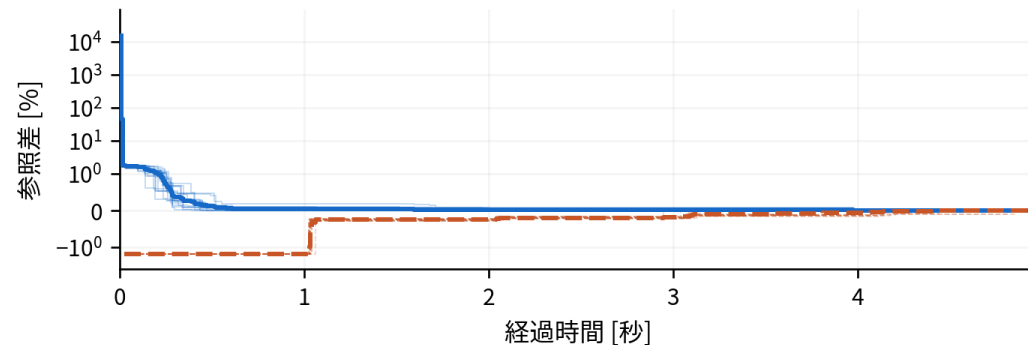
005 berlin_5_8_0 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



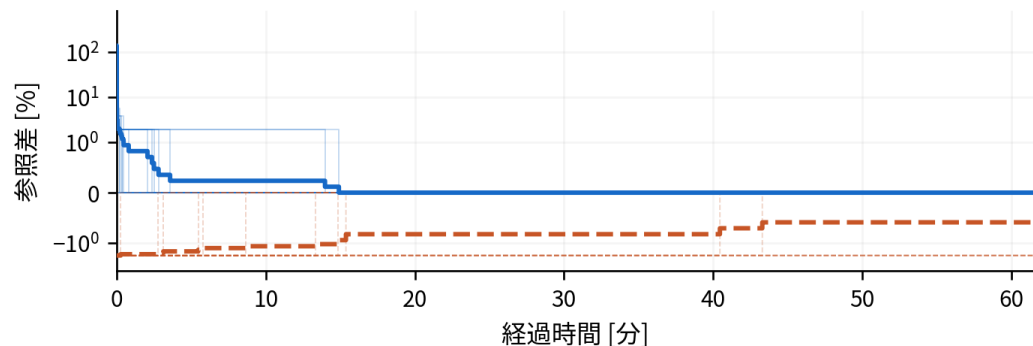
006 binkar10_1 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



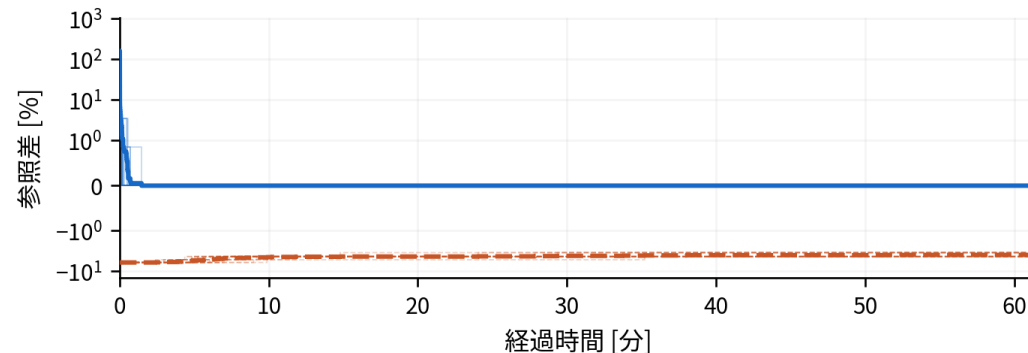
007 bppc4-08 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 11/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



008 bppc6-02 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



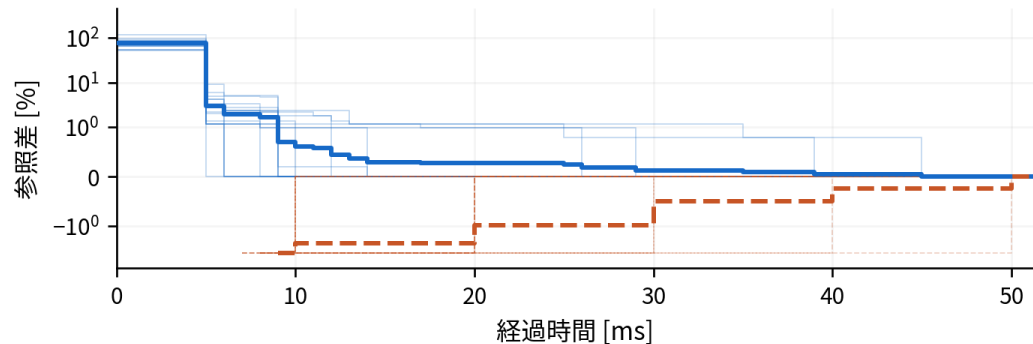
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 3/31

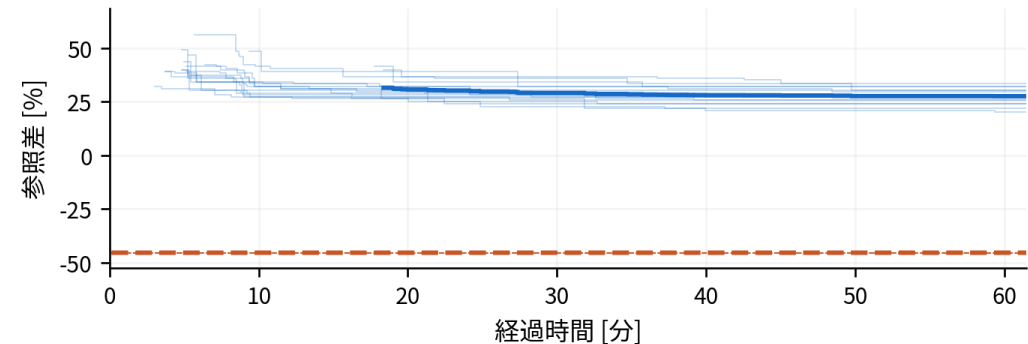
009 bppc8-02 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



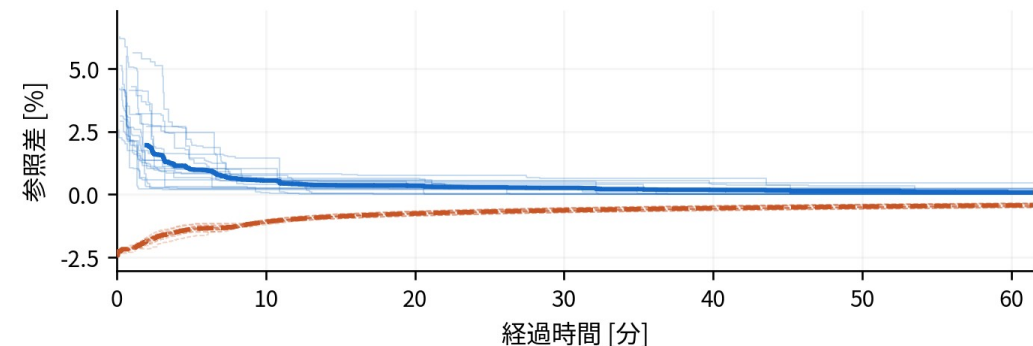
010 circ10-3 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



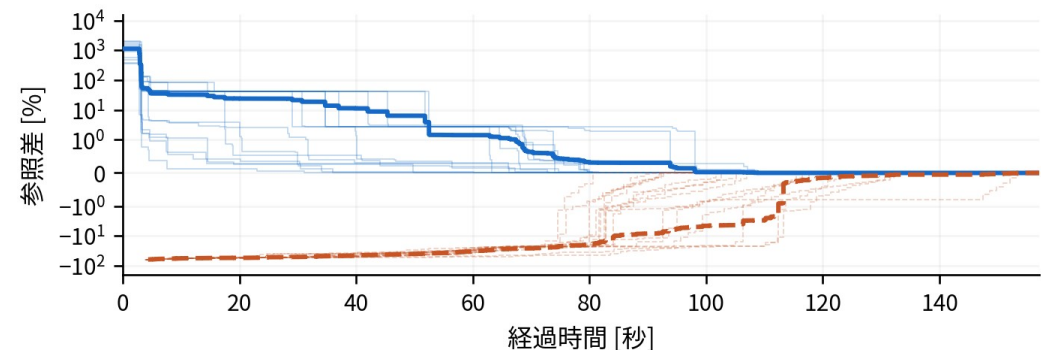
011 cmflsp40-24-10-7 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



012 co-100 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



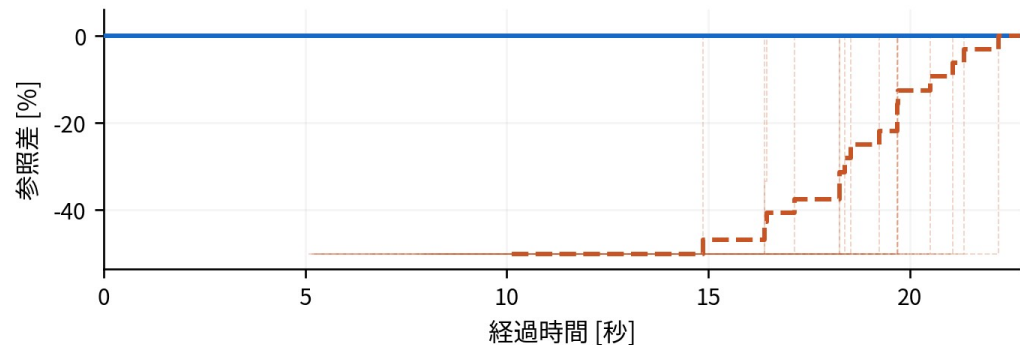
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 4/31

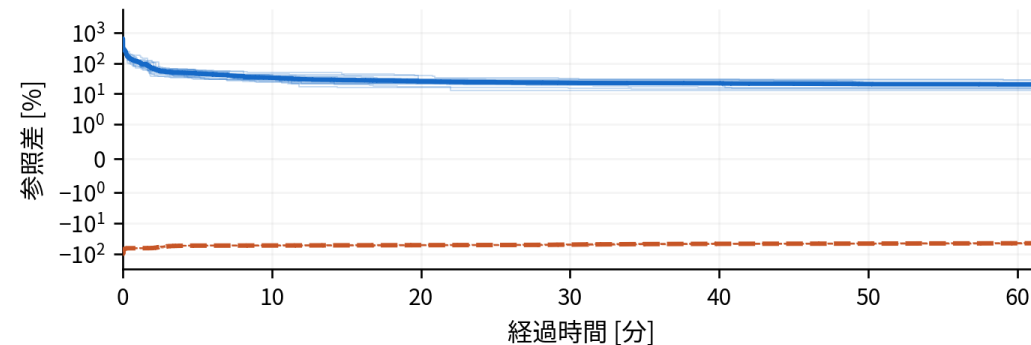
013 cod105 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



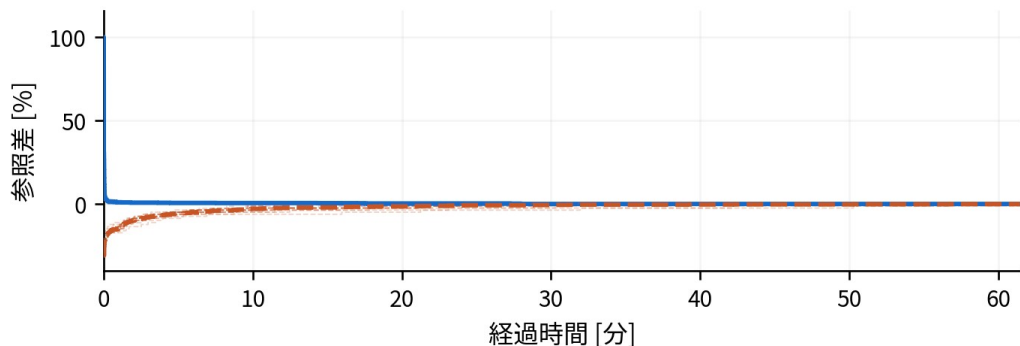
014 comp12-2idx [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



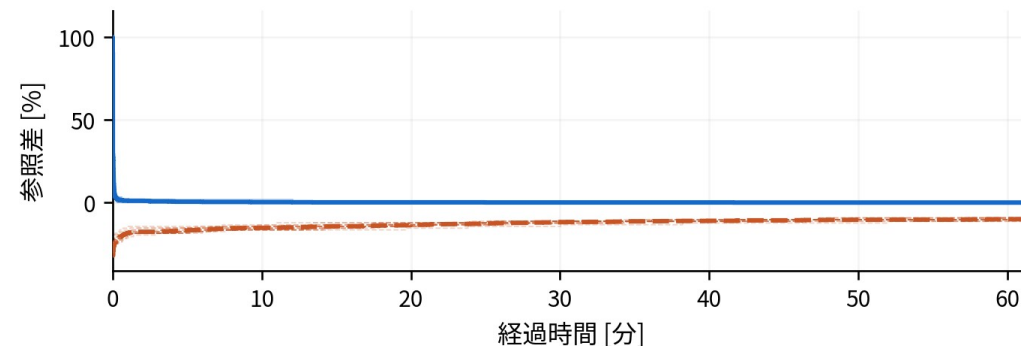
015 cvs16r106-72 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 15/16 / 縦軸：線形



016 cvs16r128-89 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



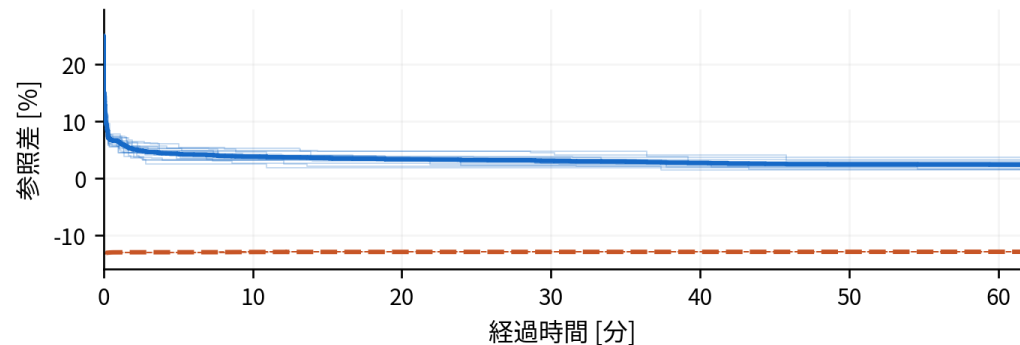
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 5/31

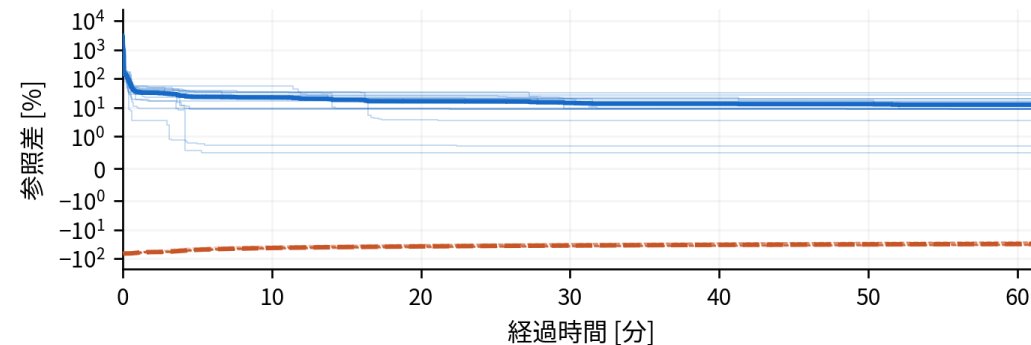
017 dano3mip [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



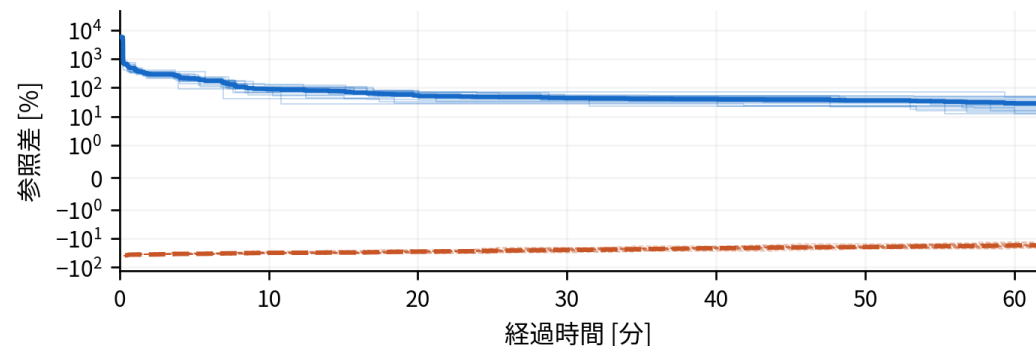
018 dg012142 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



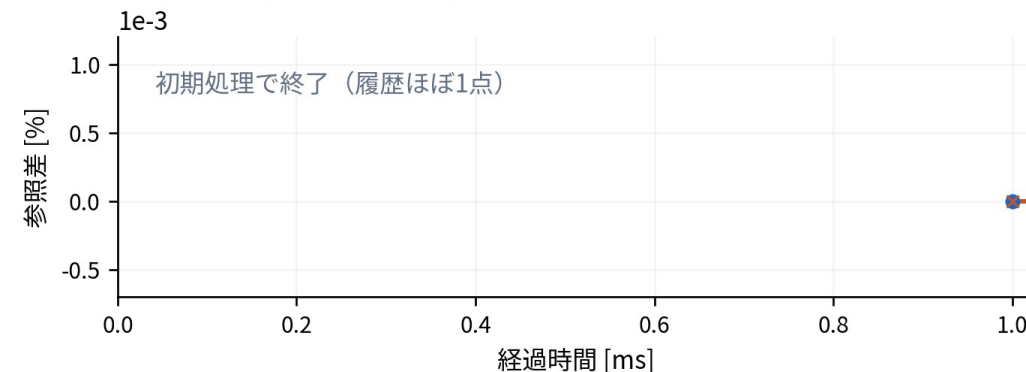
019 ds [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



020 enlight_hard [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



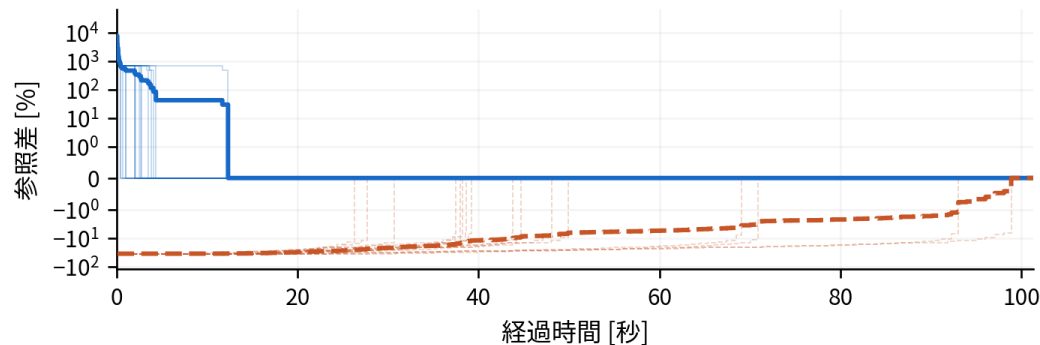
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

← [問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 6/31

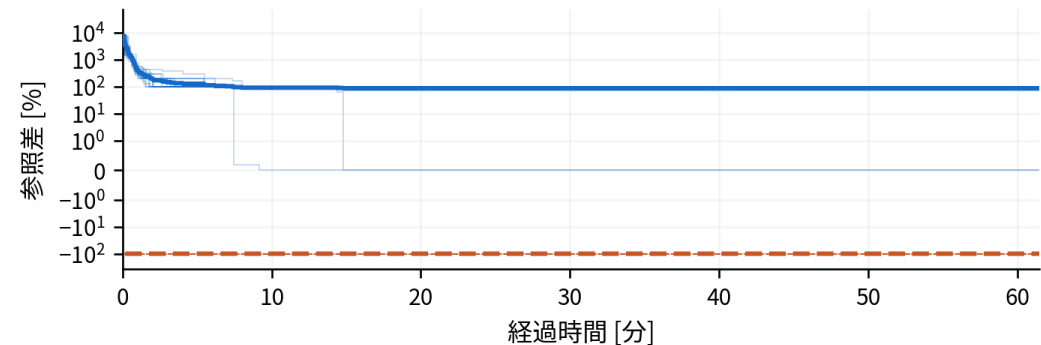
021 fastxgemm-n2r7s4t1 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



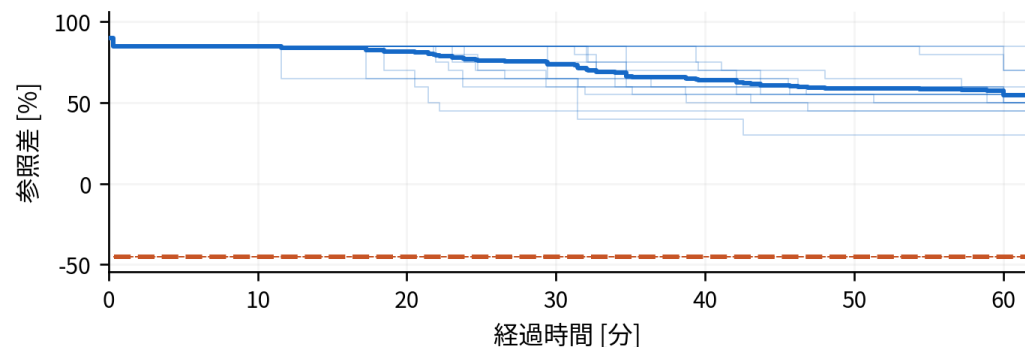
022 fastxgemm-n3r23s5t6 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



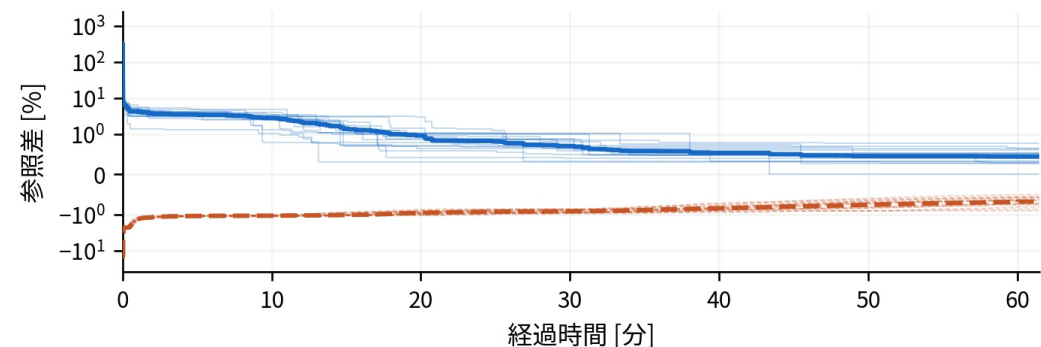
023 genus-g61-25 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



024 ger50-17-trans-pop-3t [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



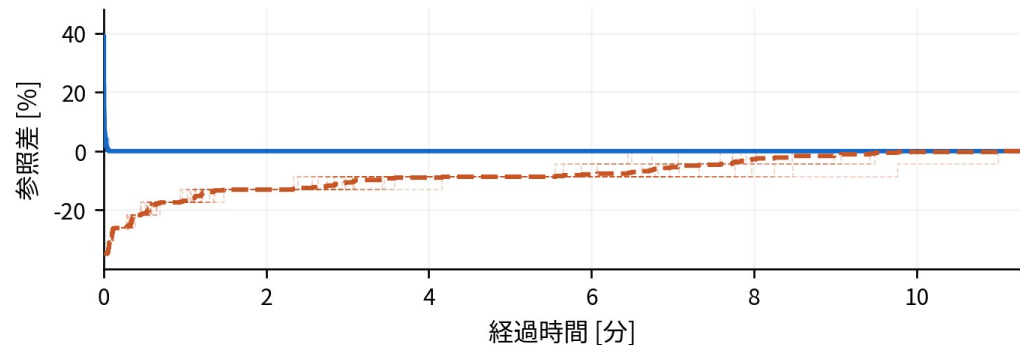
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 7/31

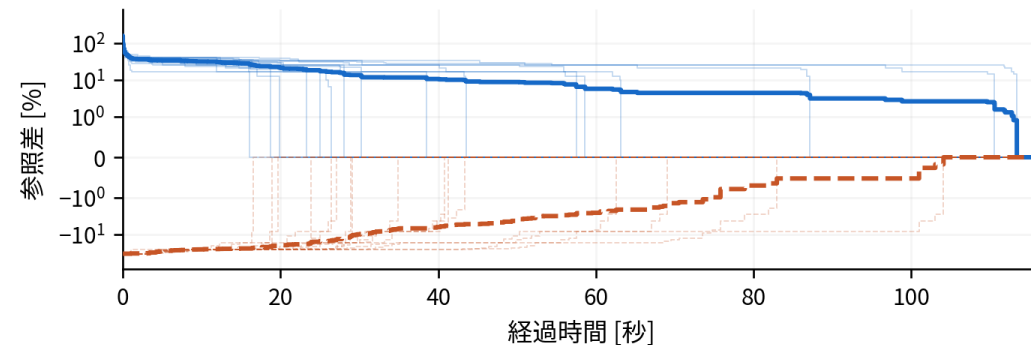
025 glass-sc [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



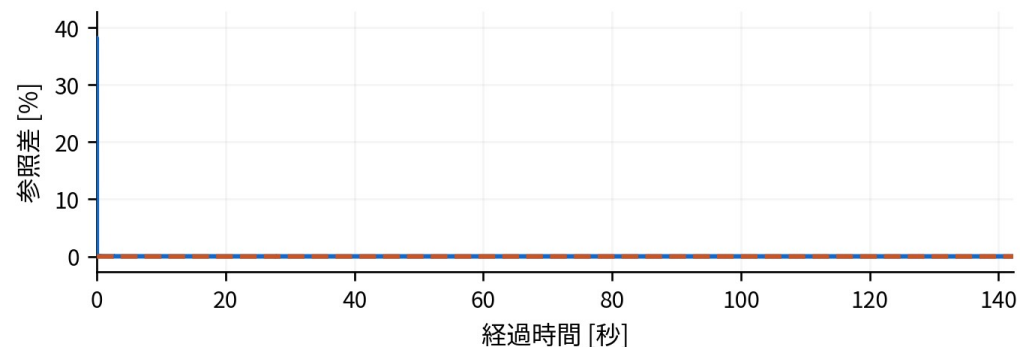
026 glass4 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



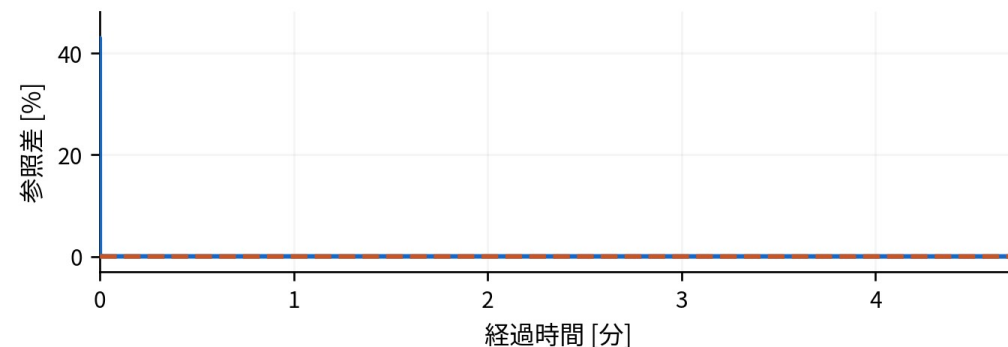
027 gmu-35-40 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



028 gmu-35-50 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



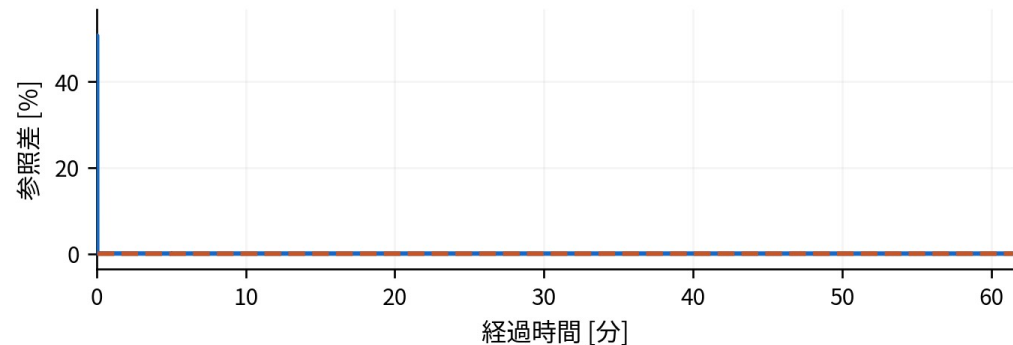
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 8/31

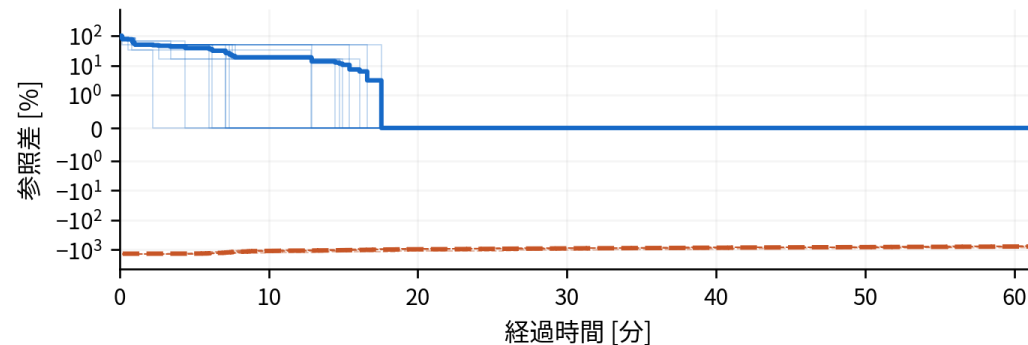
029 gmut-76-50 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 4/16 / 縦軸：線形



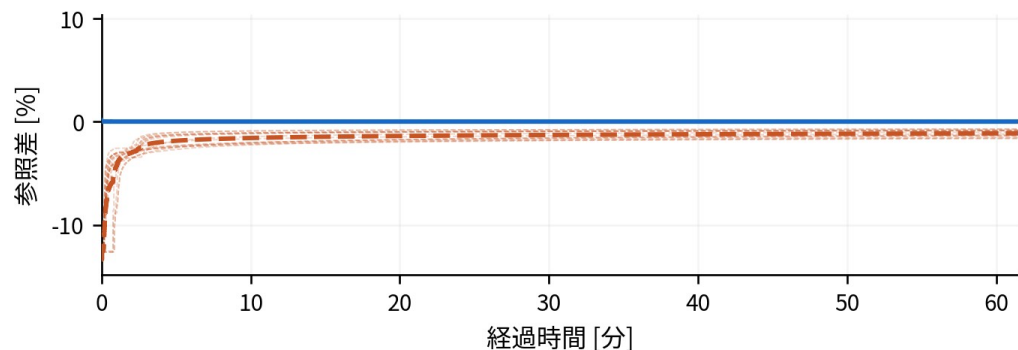
030 graph20-80-1rand [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



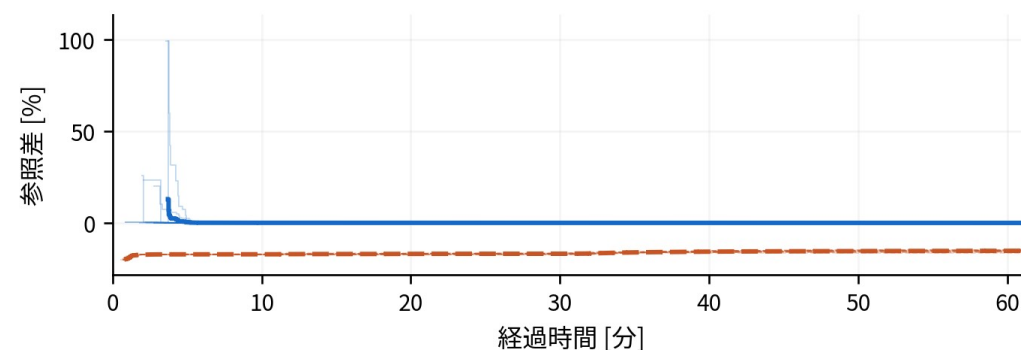
031 hgms-det [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



032 hgms30 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



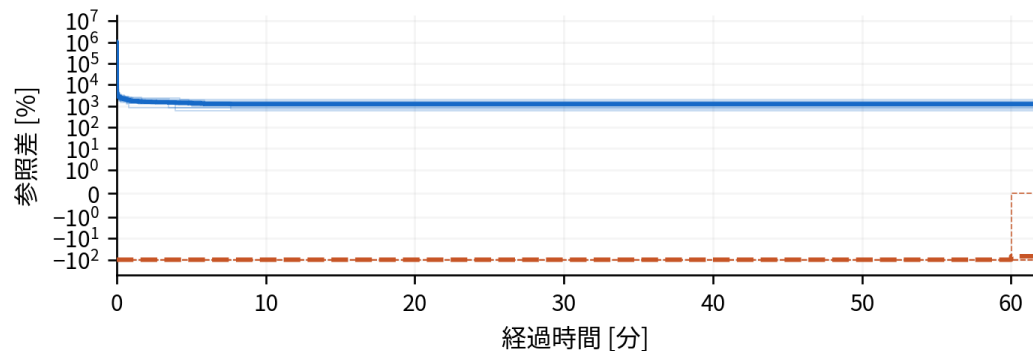
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 9/31

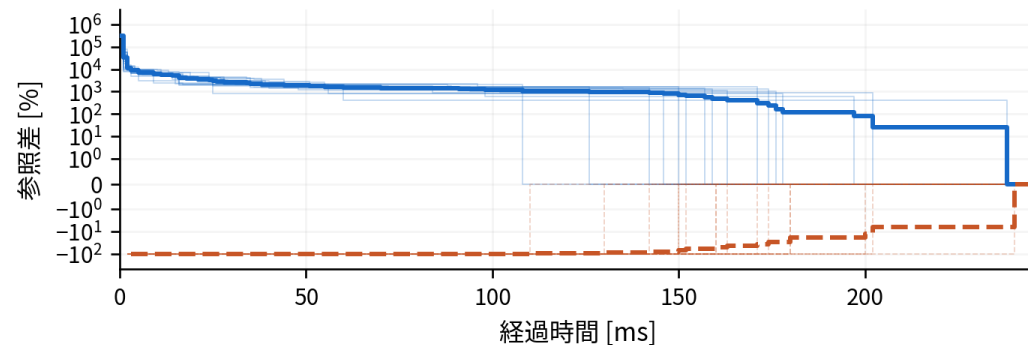
033 markshare2 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



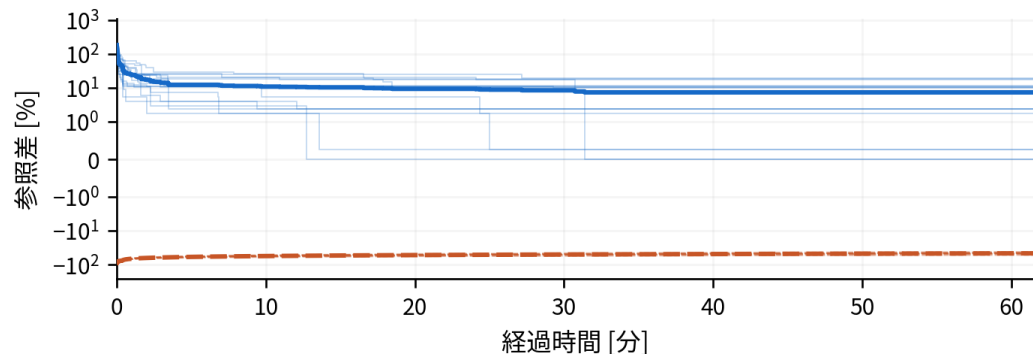
034 markshare 4_0 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



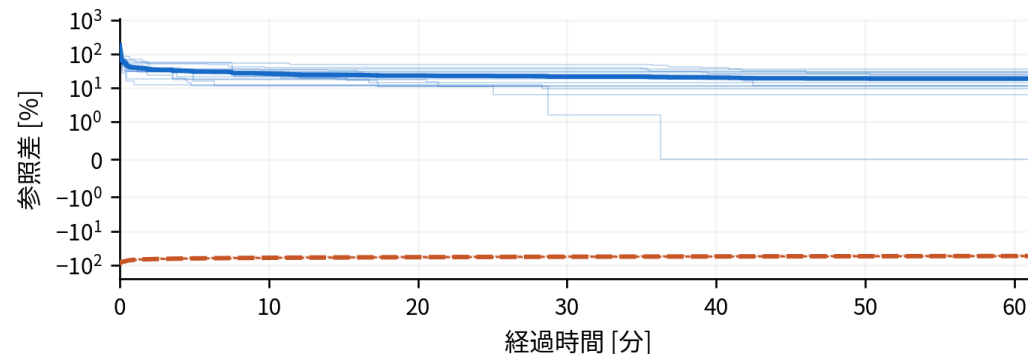
035 milo-v13-4-3d-3-0 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



036 milo-v13-4-3d-4-0 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



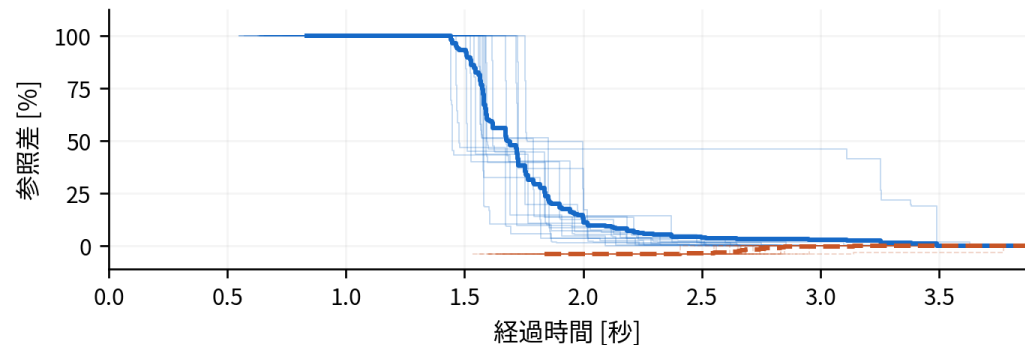
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 10/31

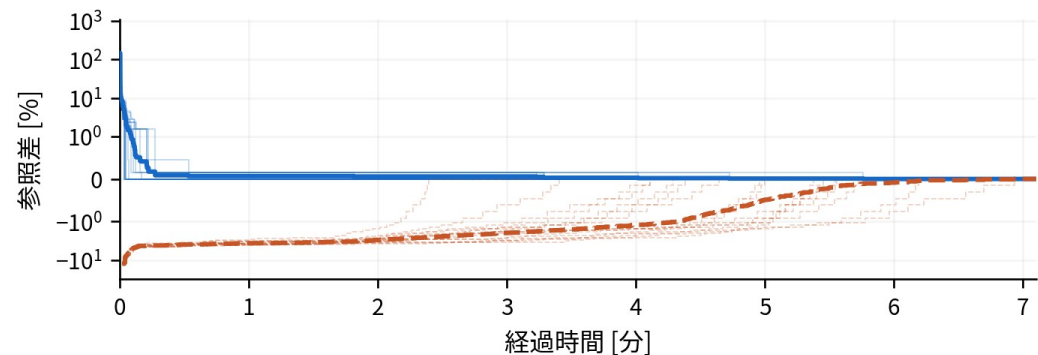
037 mzzv11 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



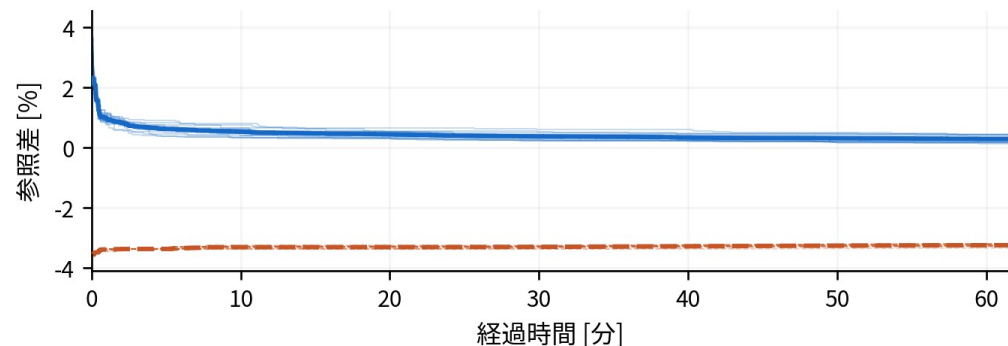
038 n3div36 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



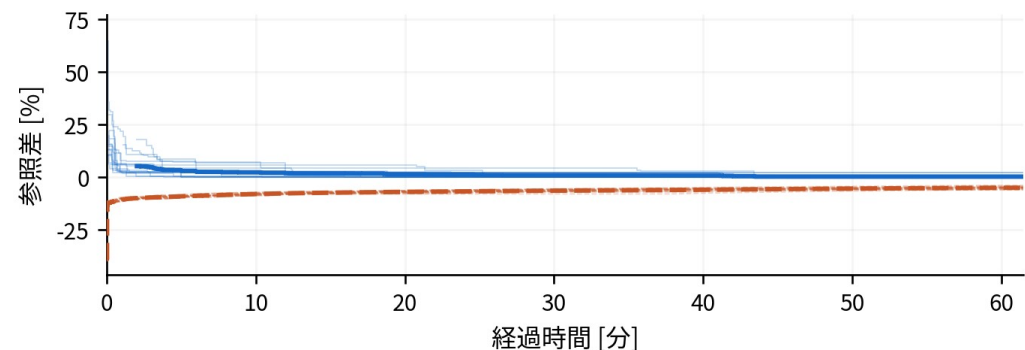
039 neos-1420546 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



040 neos-2294525-abba [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



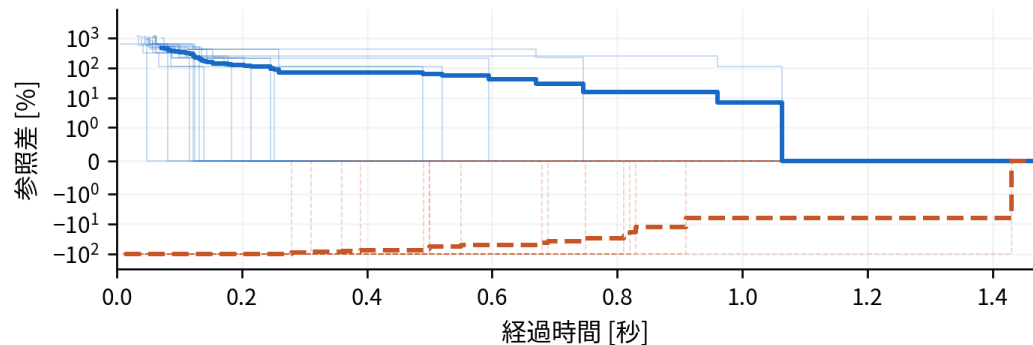
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 11/31

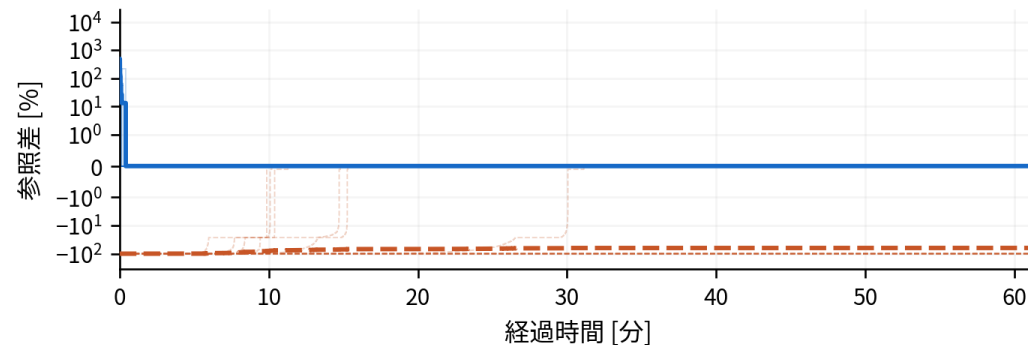
041 neos-2624317-amur [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



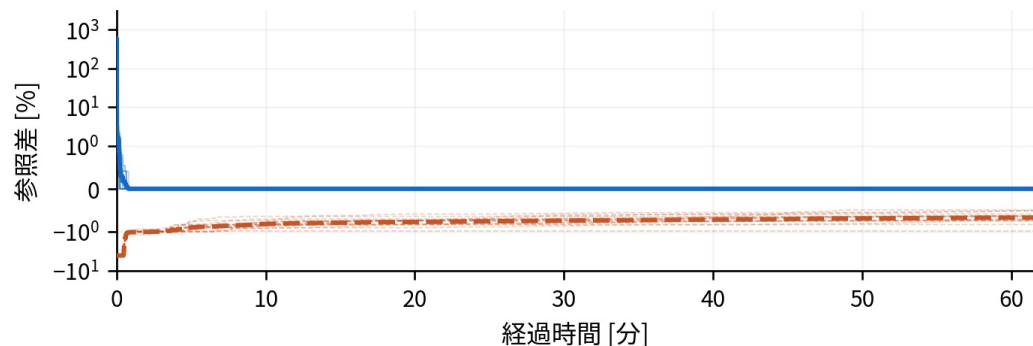
042 neos-2657525-crna [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 6/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



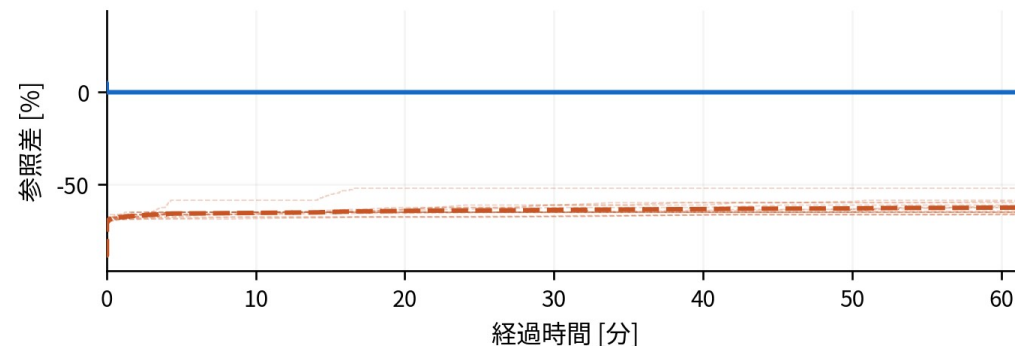
043 neos-2978205-isar [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



044 neos-3009394-lami [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



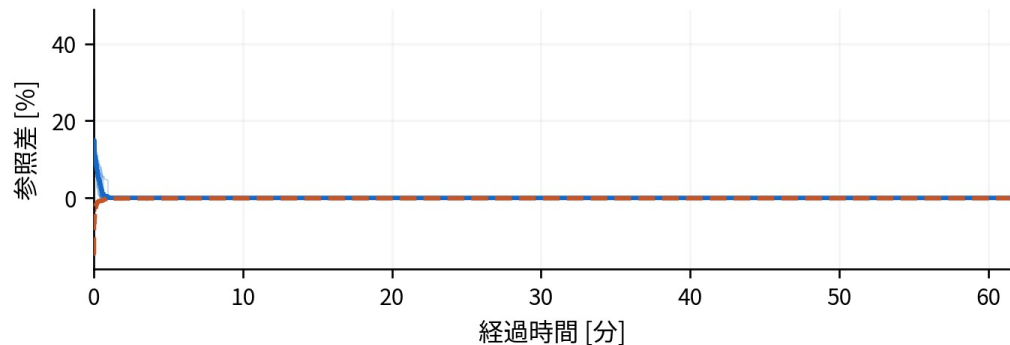
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 12/31

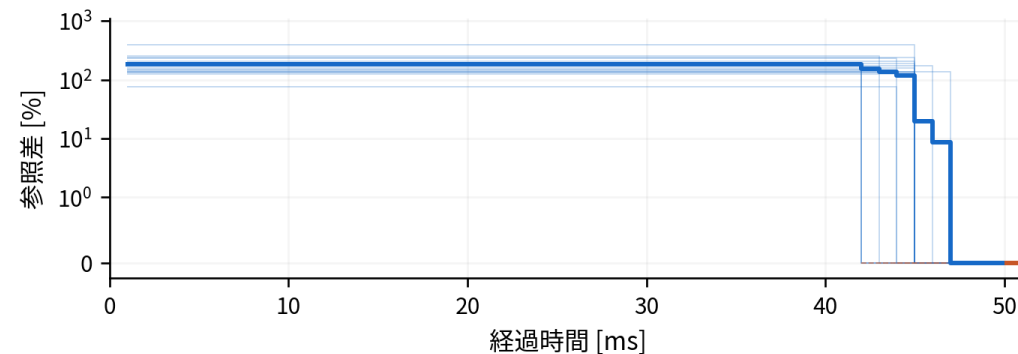
045 neos-3024952-loue [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 4/16 / 縦軸：線形



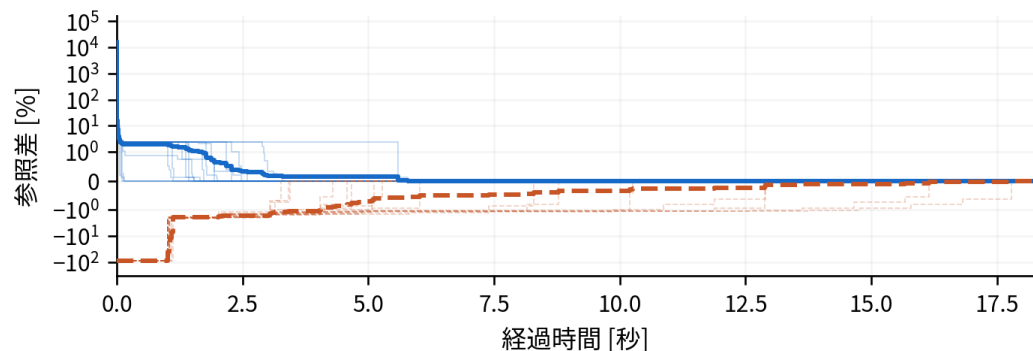
046 neos-3045796-mogo [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



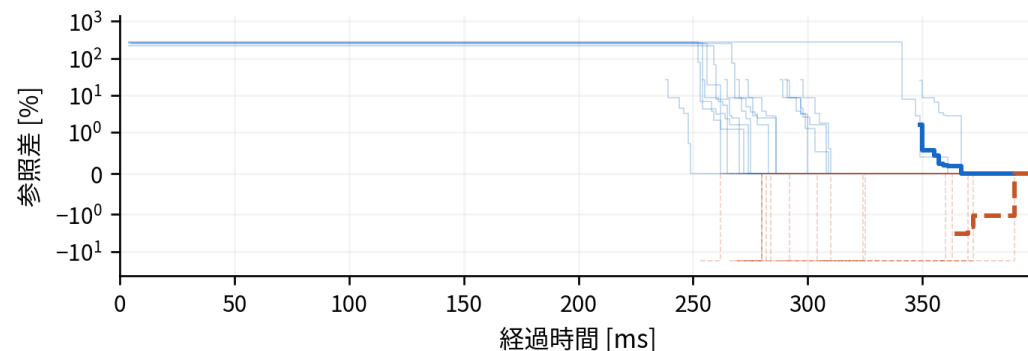
047 neos-3046615-murg [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



048 neos-3075395-nile [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



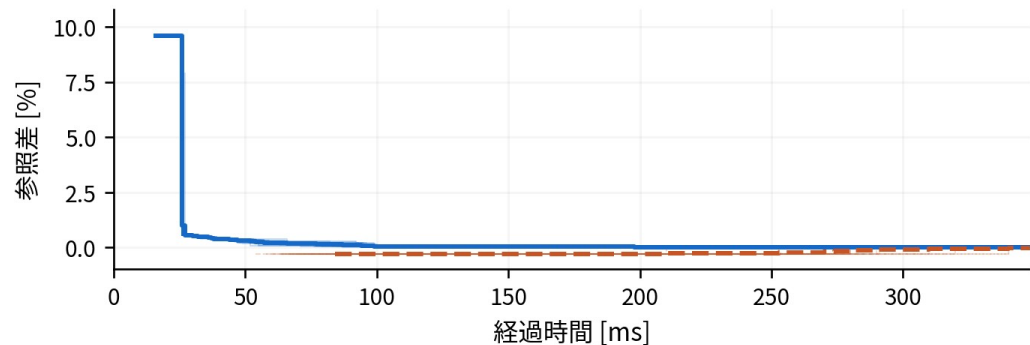
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 13/31

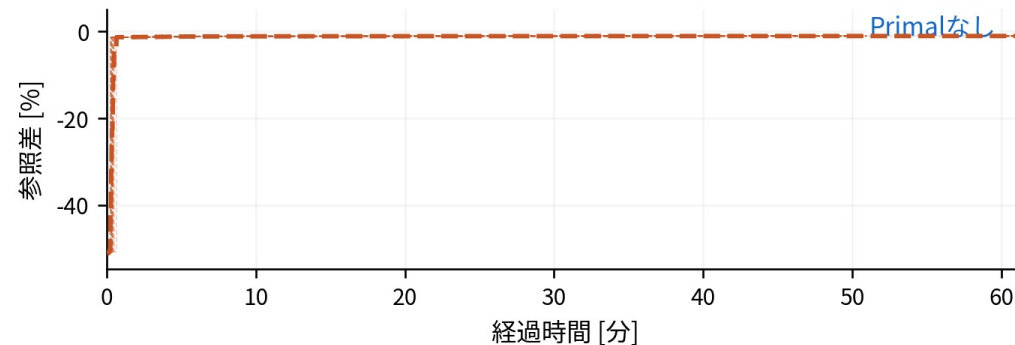
049 neos-3083819-nubu [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



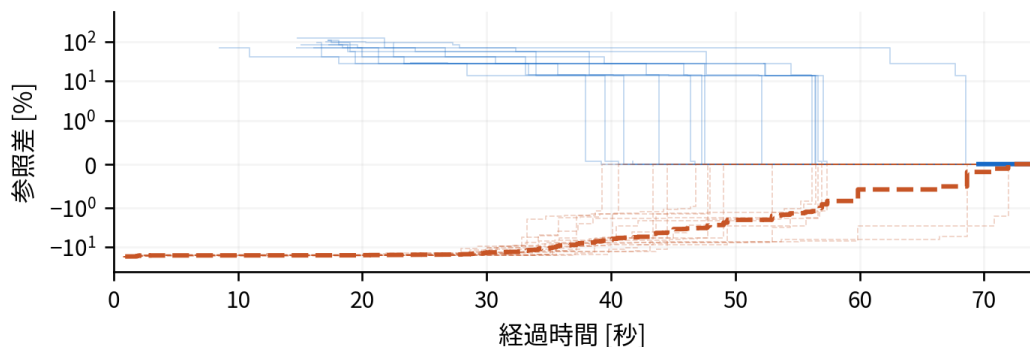
050 neos-3214367-sovi [hard]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



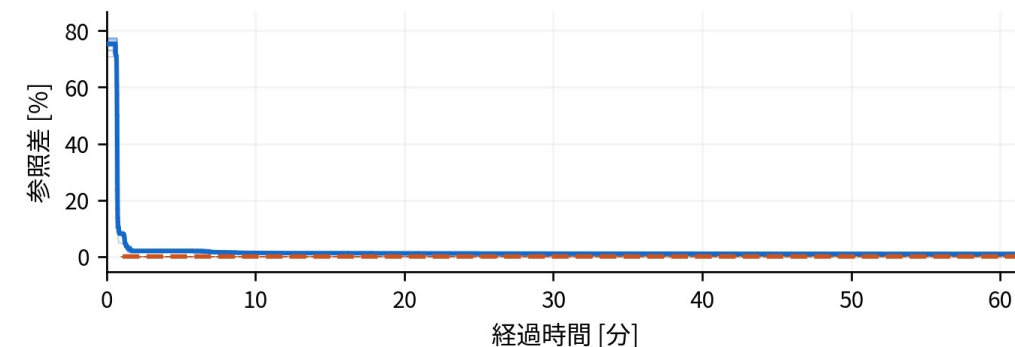
051 neos-3216931-puriri [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



052 neos-3322547-alsek [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



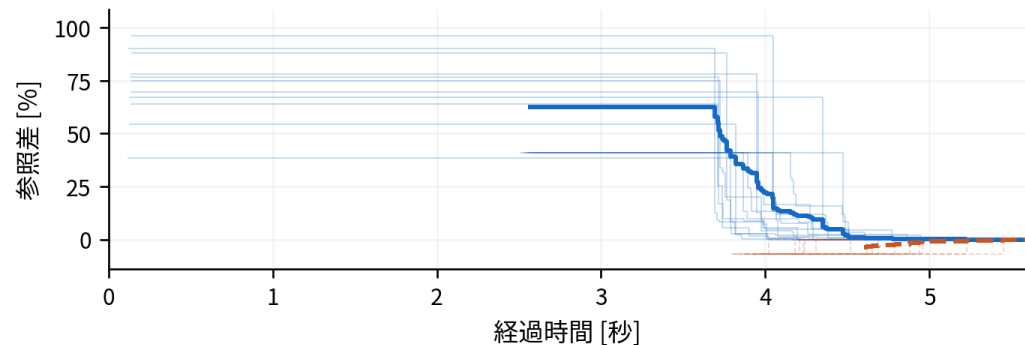
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 14/31

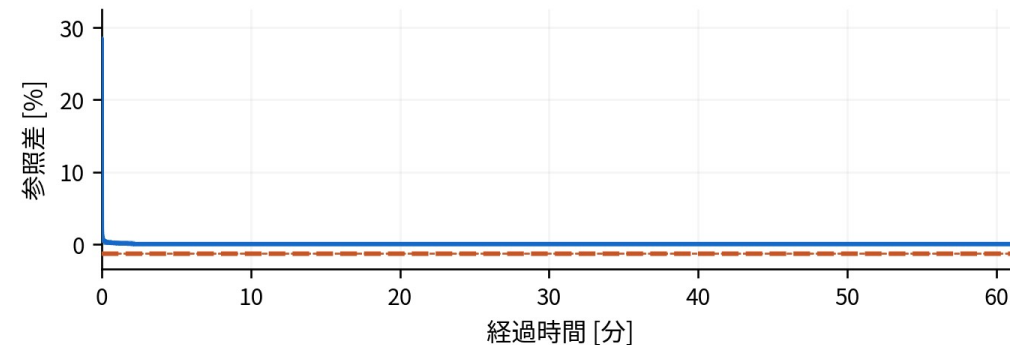
053 neos-3402294-bobin [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



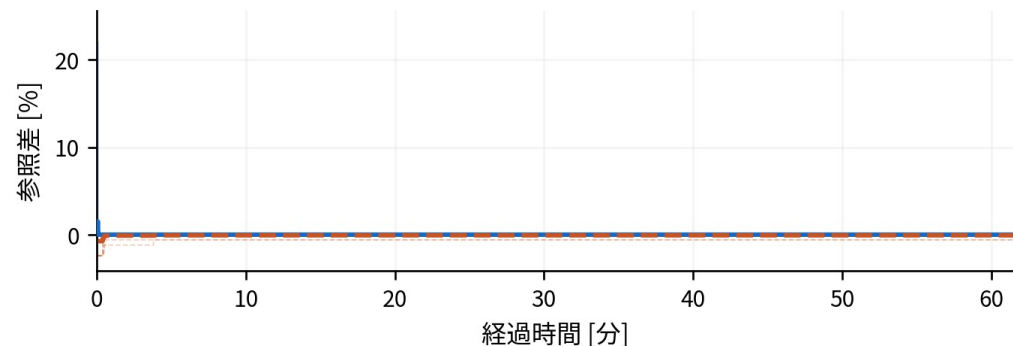
054 neos-3426085-ticino [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



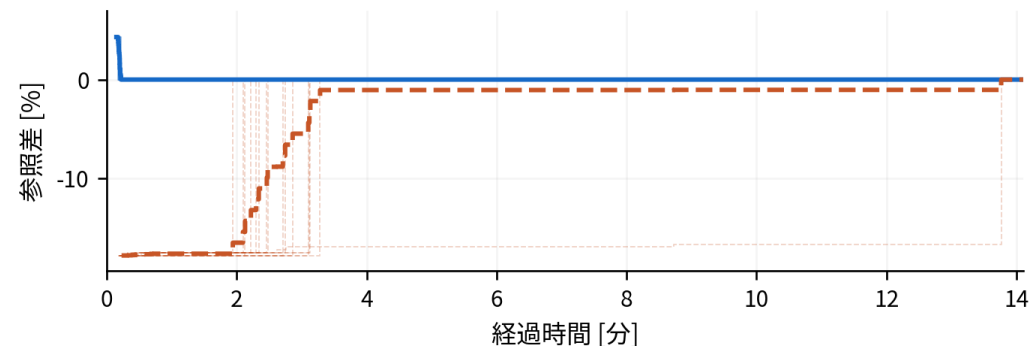
055 neos-3530903-gauja [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 14/16 / 縦軸：線形



056 neos-3555904-turama [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



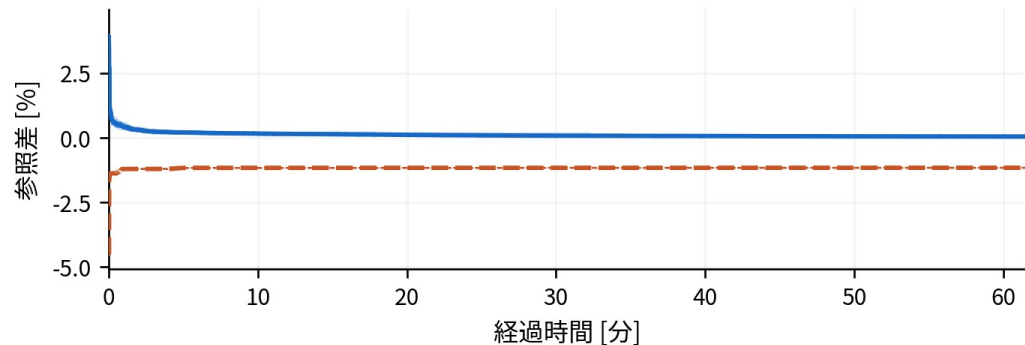
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 15/31

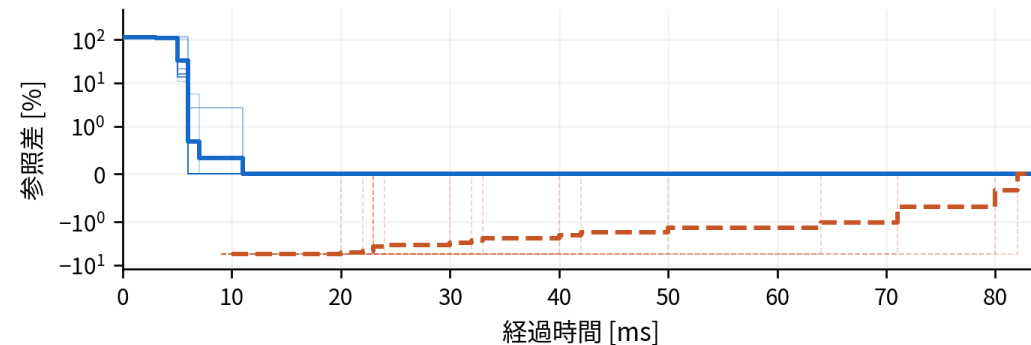
057 neos-3594536-henty [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



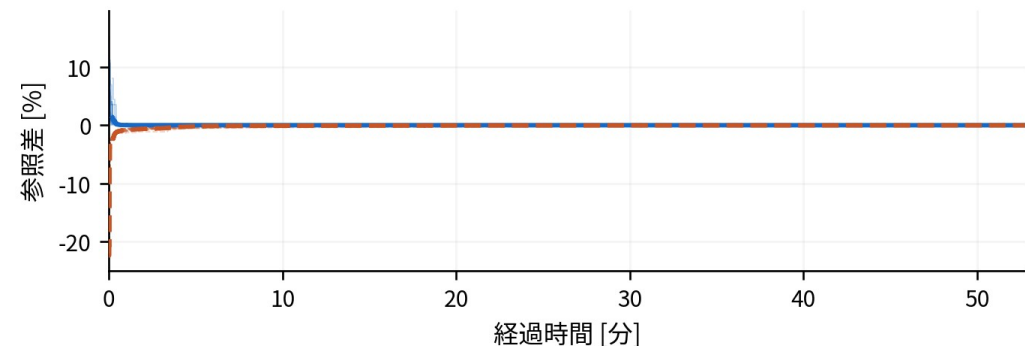
058 neos-3610040-iskar [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



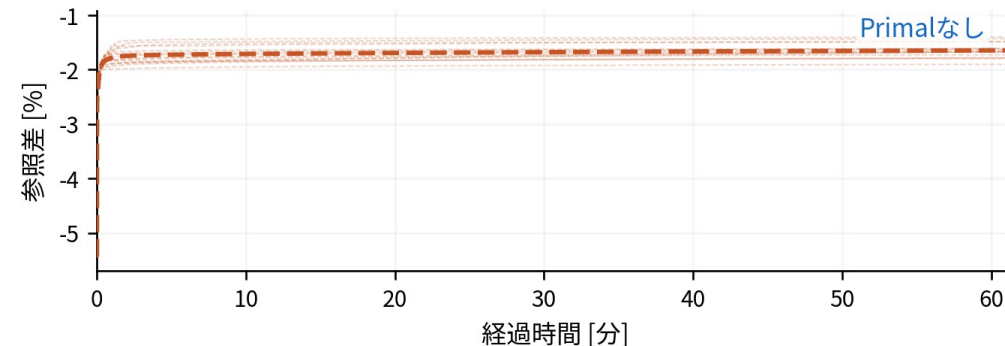
059 neos-3656078-kumeu [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



060 neos-3691541-lonja [open]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



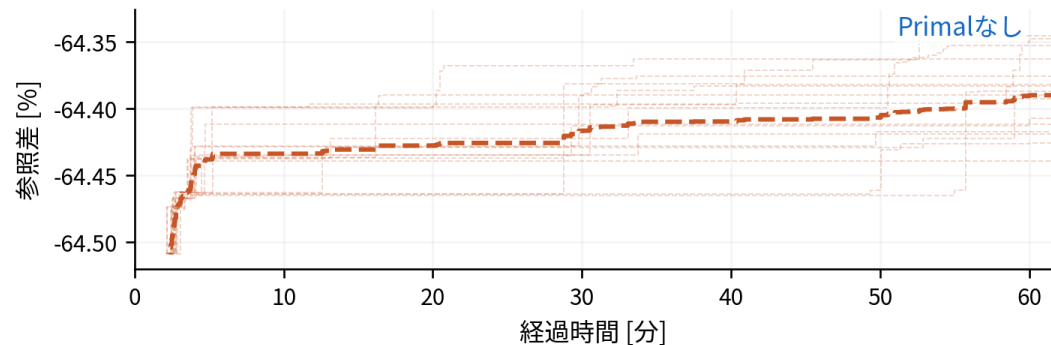
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

← [問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 16/31

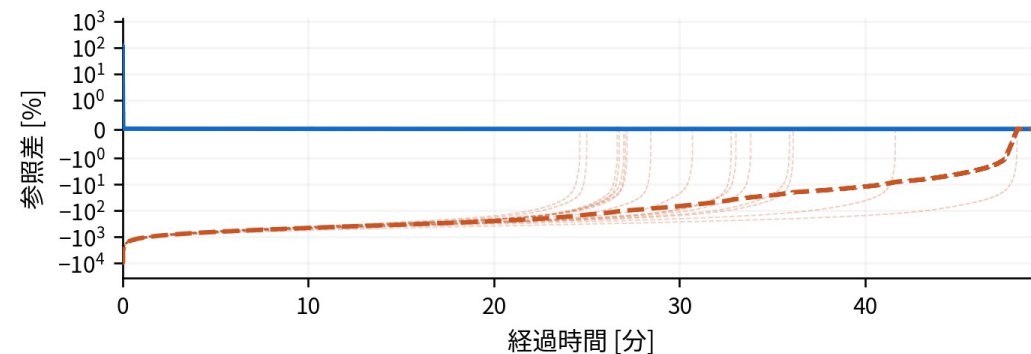
061 neos-3754224-navua [open]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



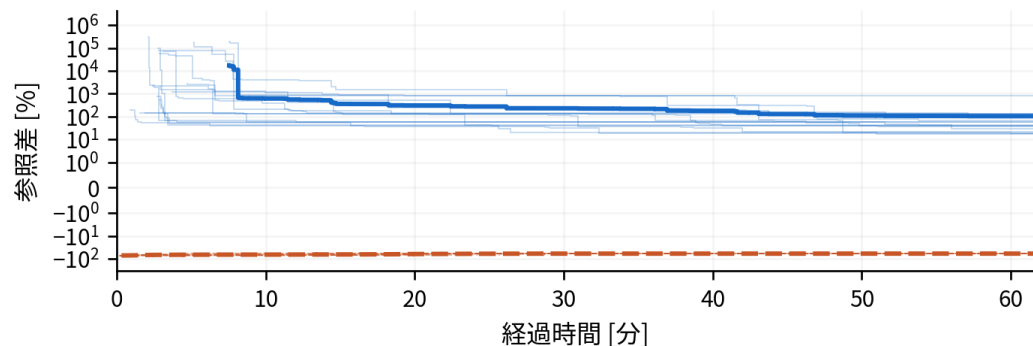
062 neos-3754480-nidda [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



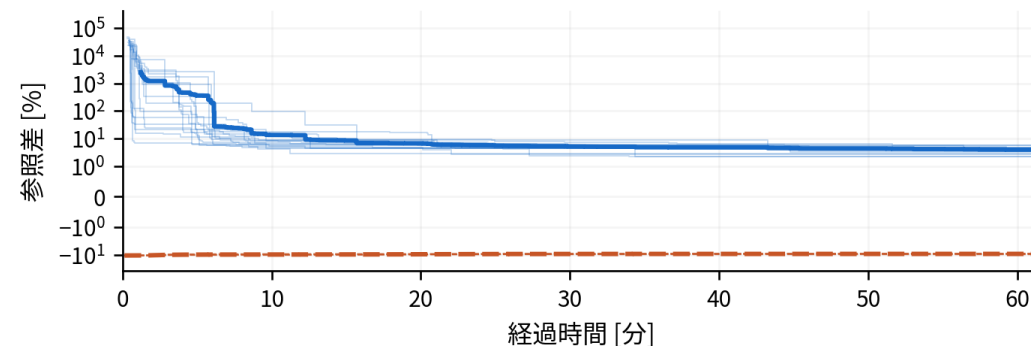
063 neos-4230265-orari [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



064 neos-4264598-oueme [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



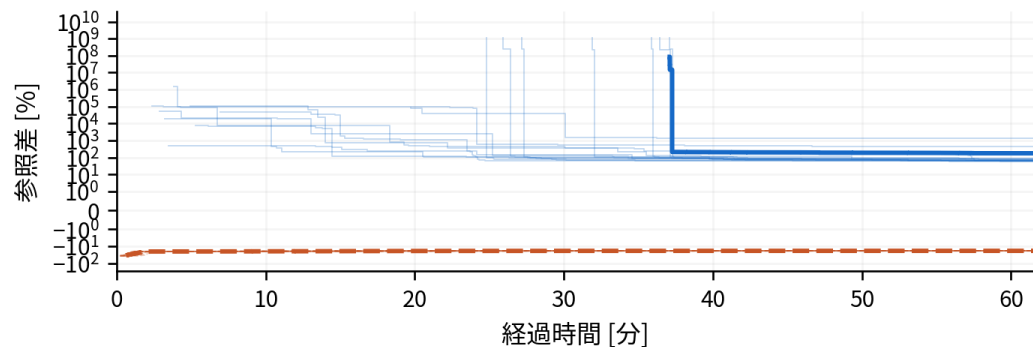
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

← [問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 17/31

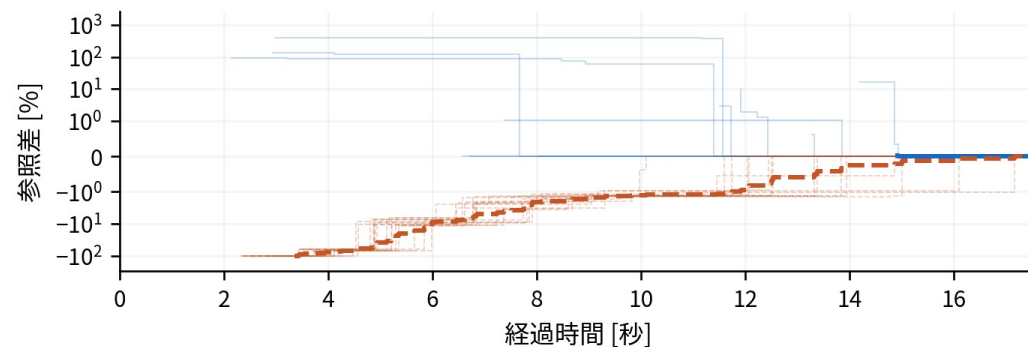
065 neos-4292145-piako [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



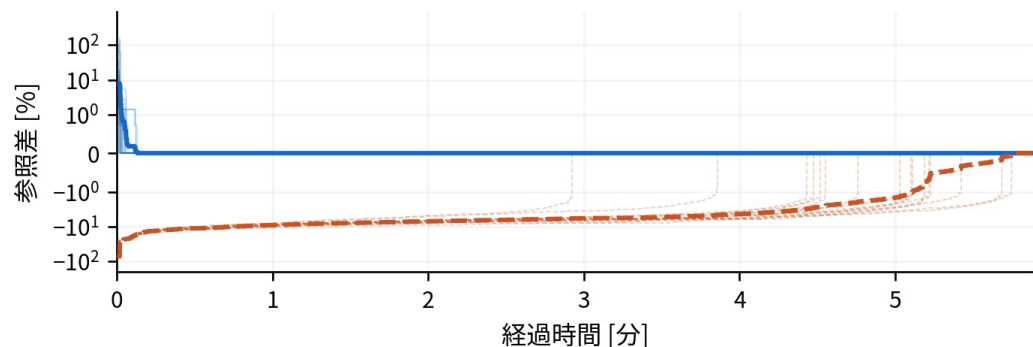
066 neos-4300652-rahue [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



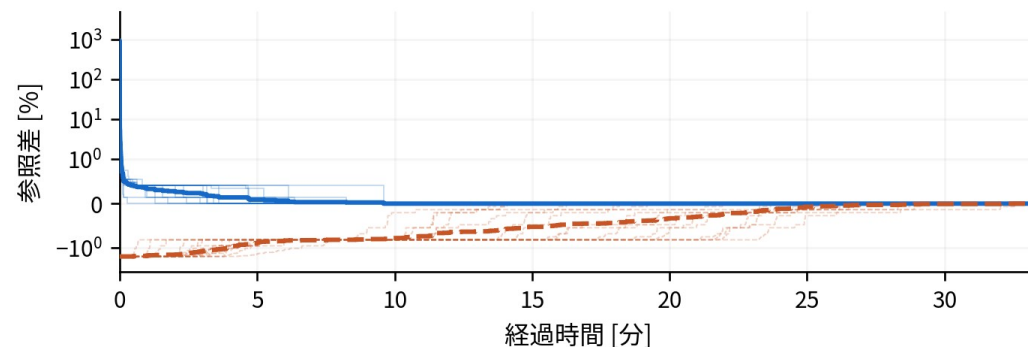
067 neos-4333464-siret [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



068 neos-4338804-snowy [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



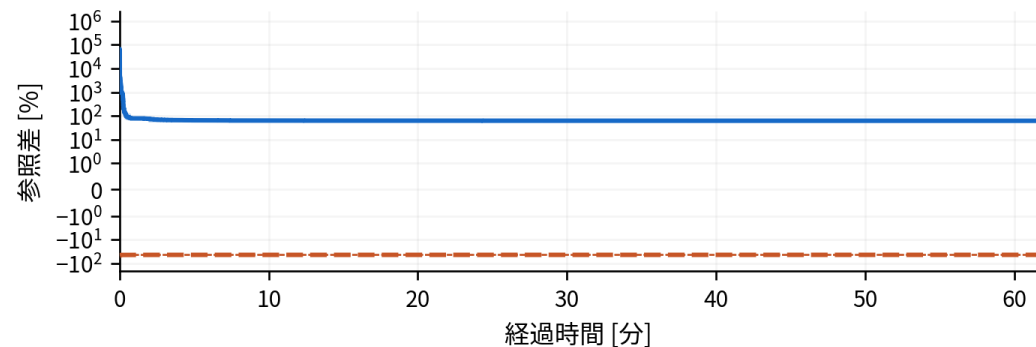
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 18/31

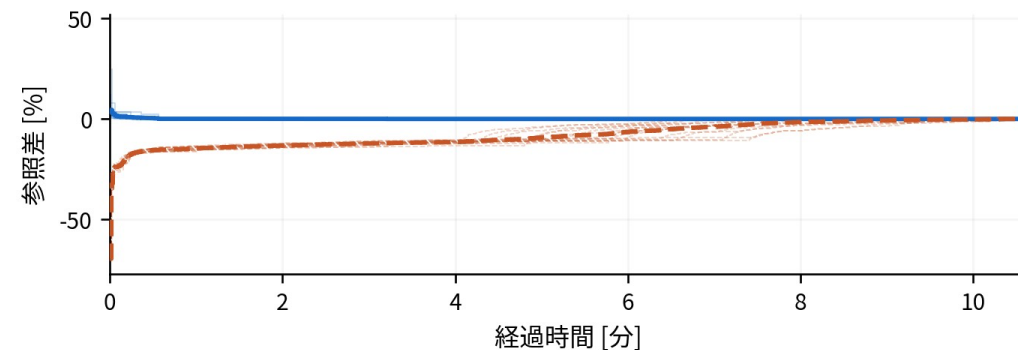
069 neos-4358725-tagus [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



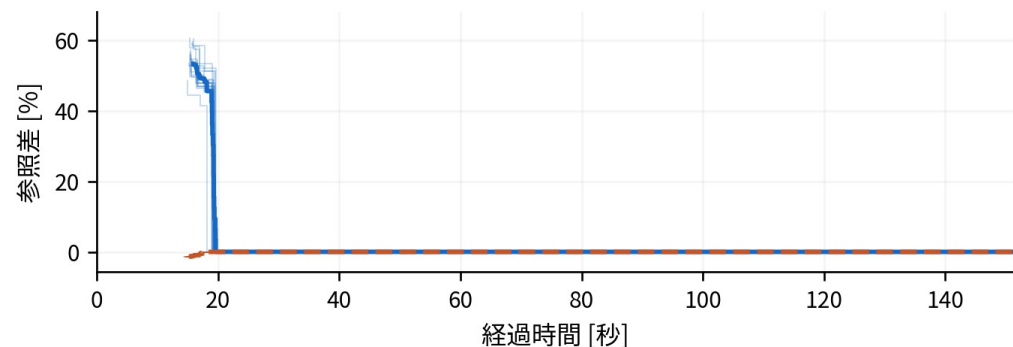
070 neos-4387871-tavua [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



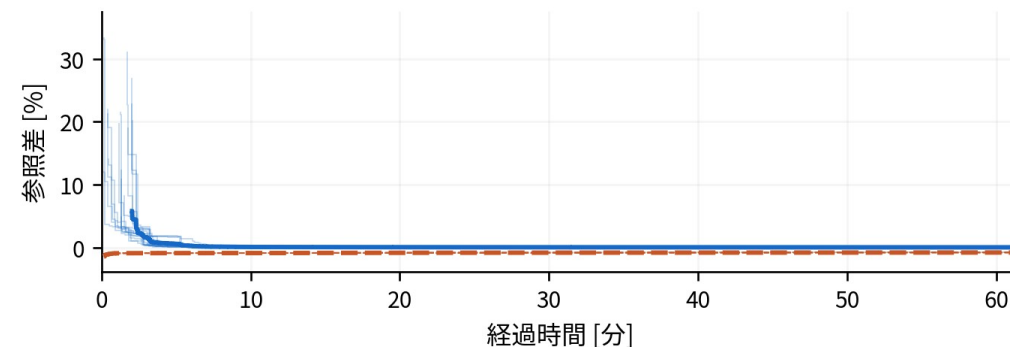
071 neos-4647030-tutaki [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



072 neos-5041822-cockle [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



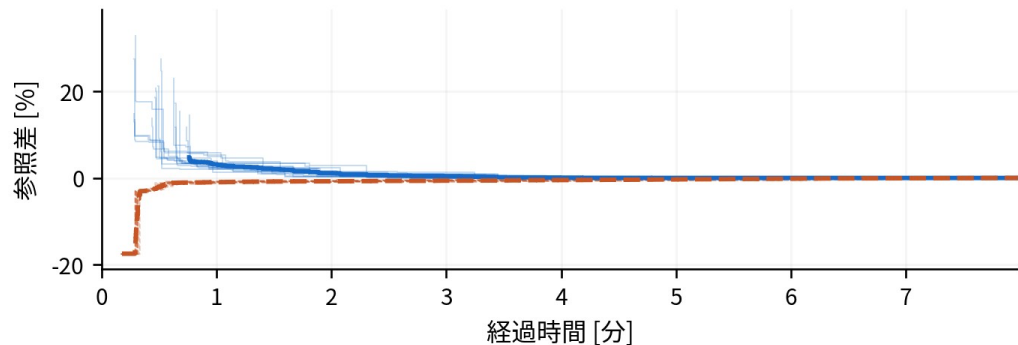
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 19/31

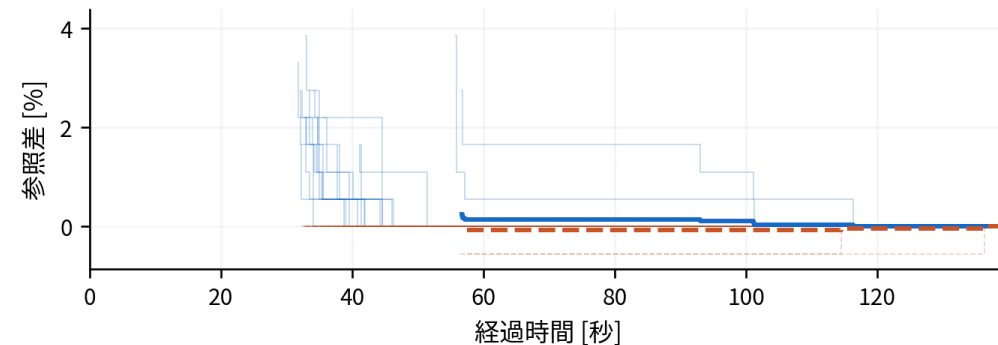
073 neos-5049753-cuanza [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



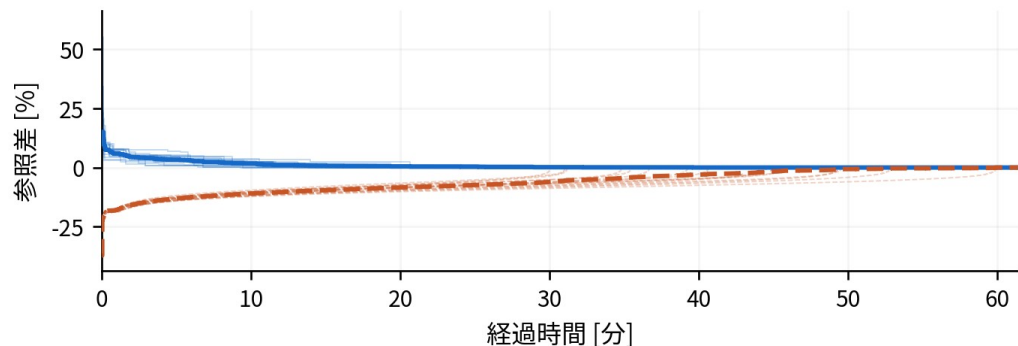
074 neos-5052403-cygnnet [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



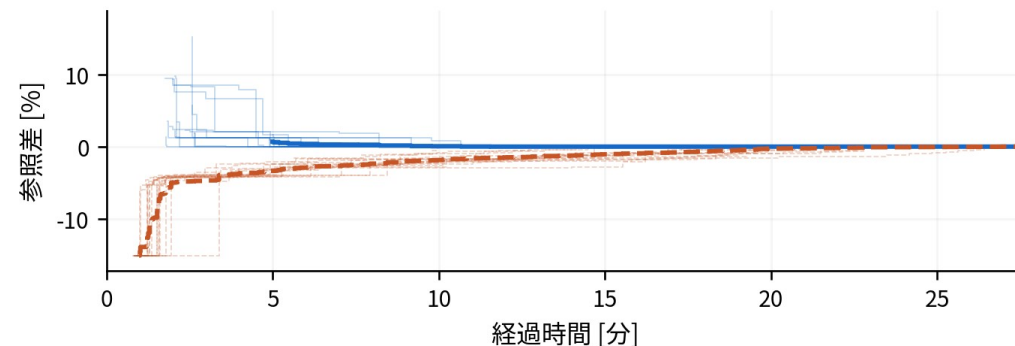
075 neos-5093327-huahum [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



076 neos-5104907-jarama [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



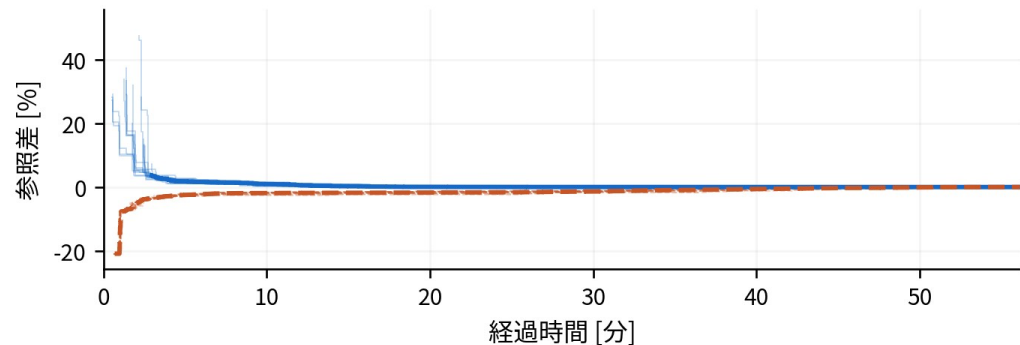
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 20/31

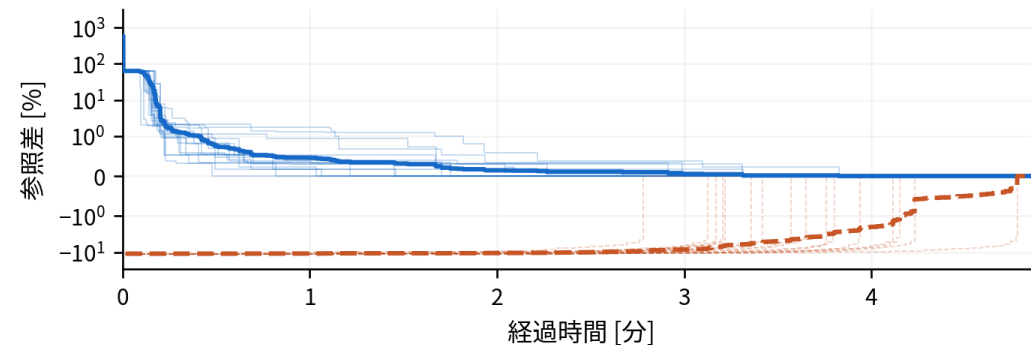
077 neos-5114902-kasavu [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



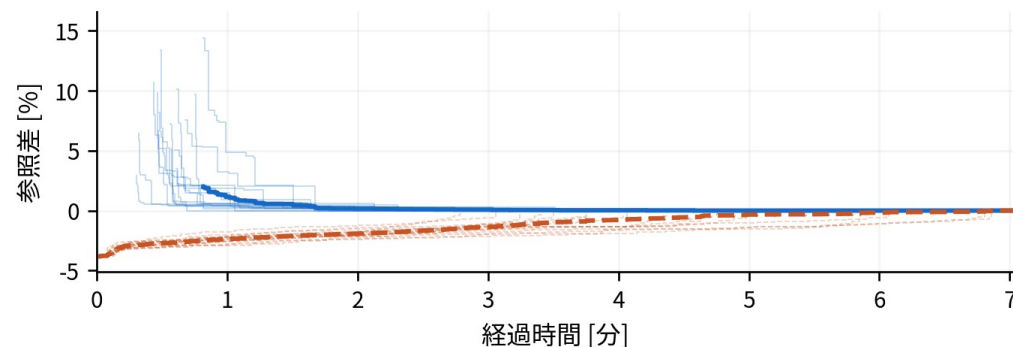
078 neos-5188808-nattai [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



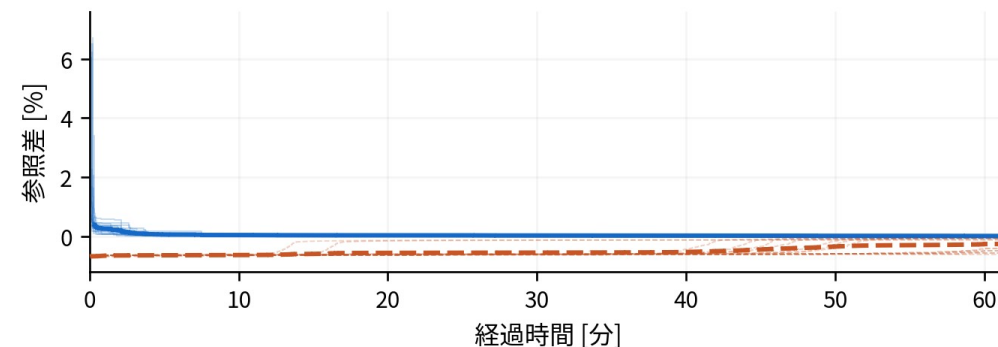
079 neos-5193246-nerang [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



080 neos-5196530-nuhaka [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



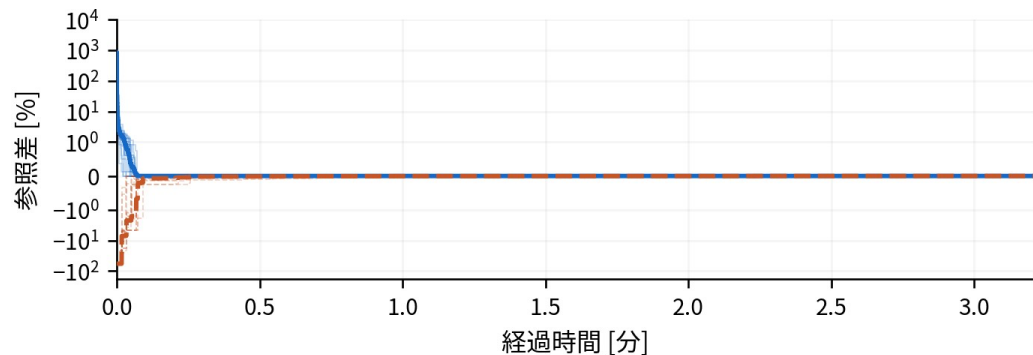
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 21/31

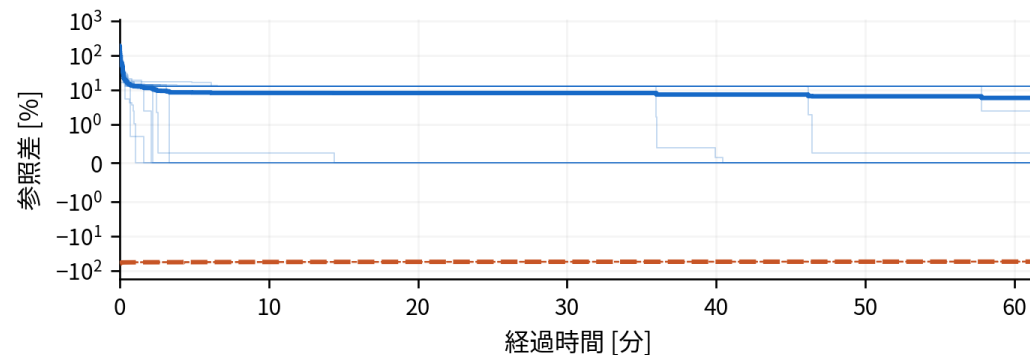
081 neos-911970 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



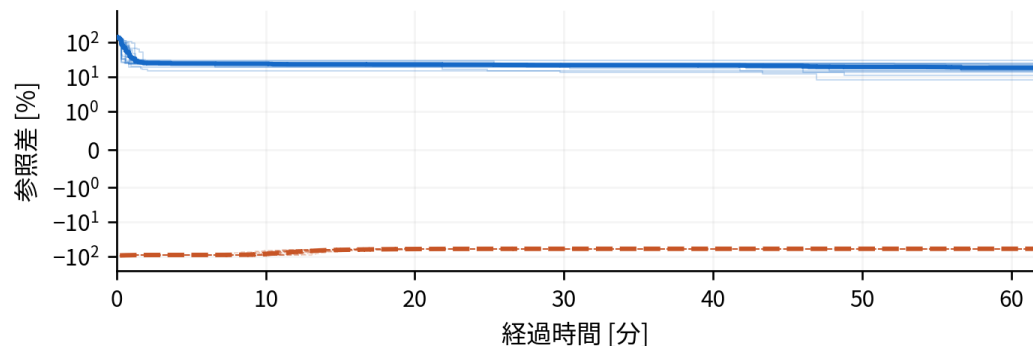
082 ns1456591 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



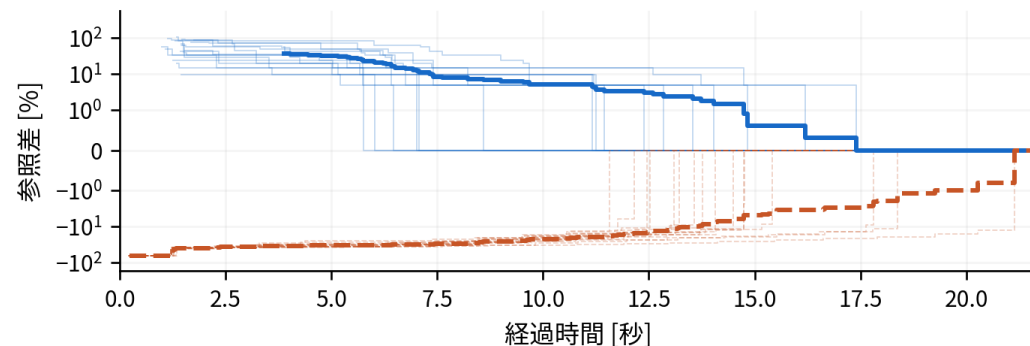
083 ns1631475 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



084 ns1830653 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



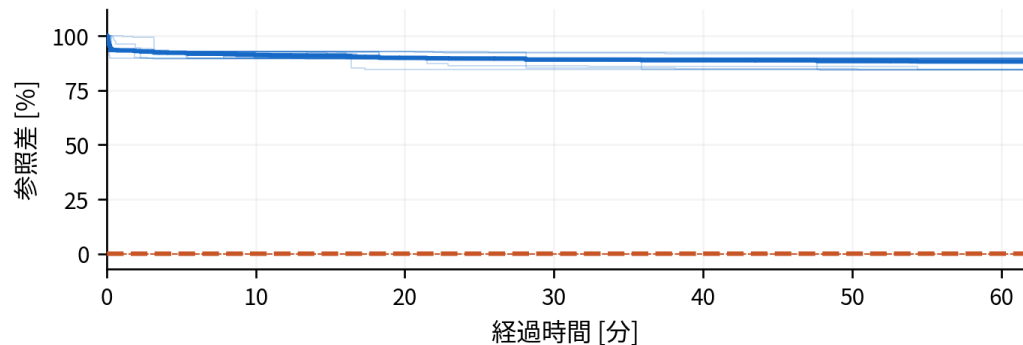
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 22/31

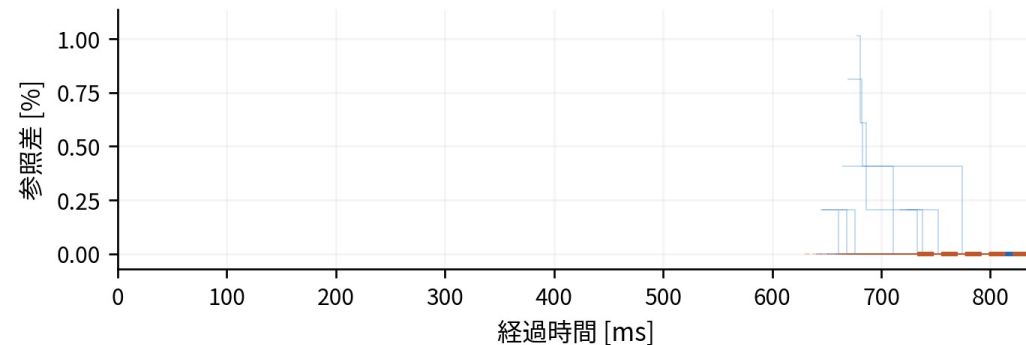
085 pb-grow22 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



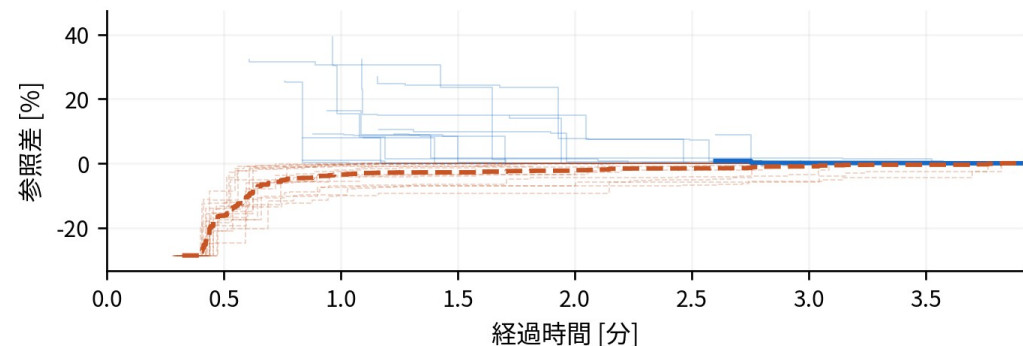
086 physiciansched6-2 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



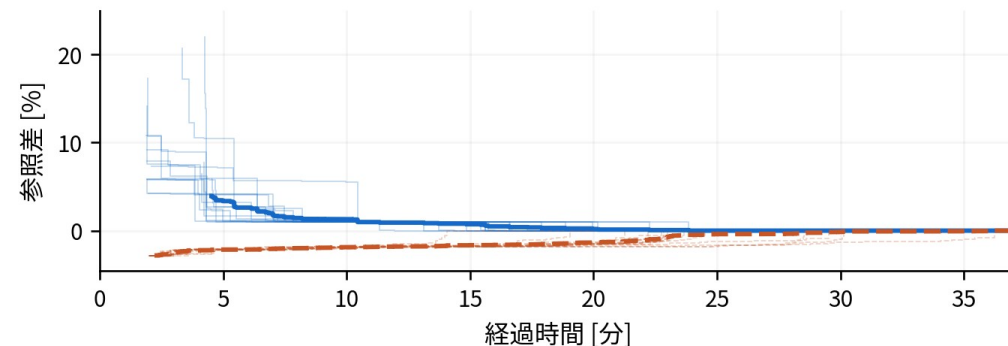
087 rail01 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



088 rail02 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



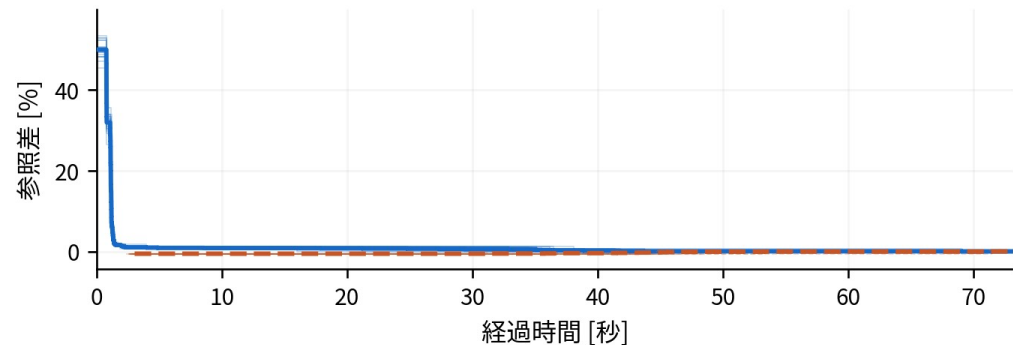
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 23/31

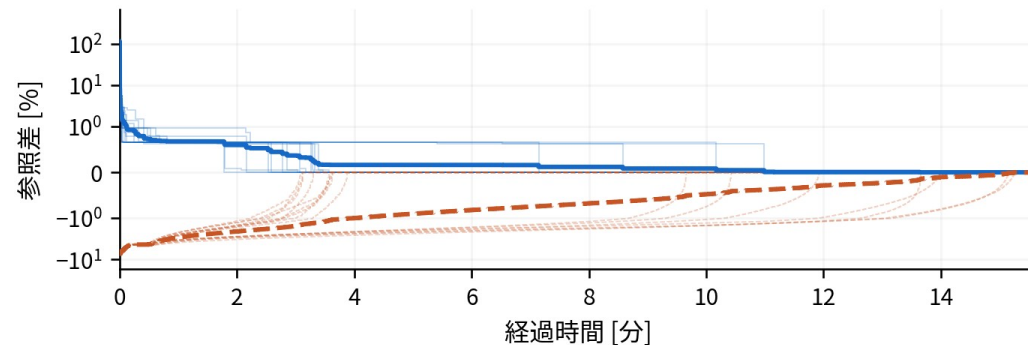
089 rail507 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



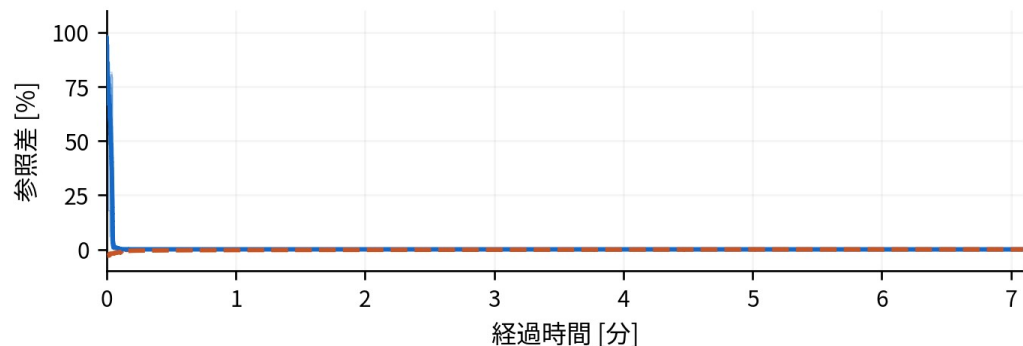
090 ran14x18-disj-8 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



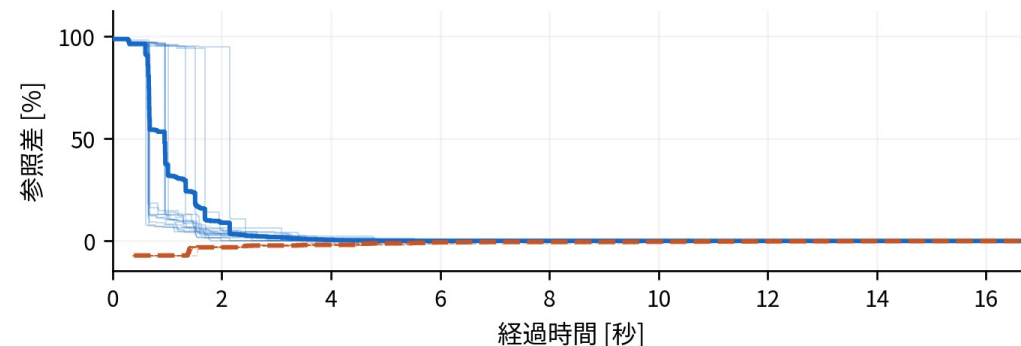
091 reblock115 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



092 reblock166 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



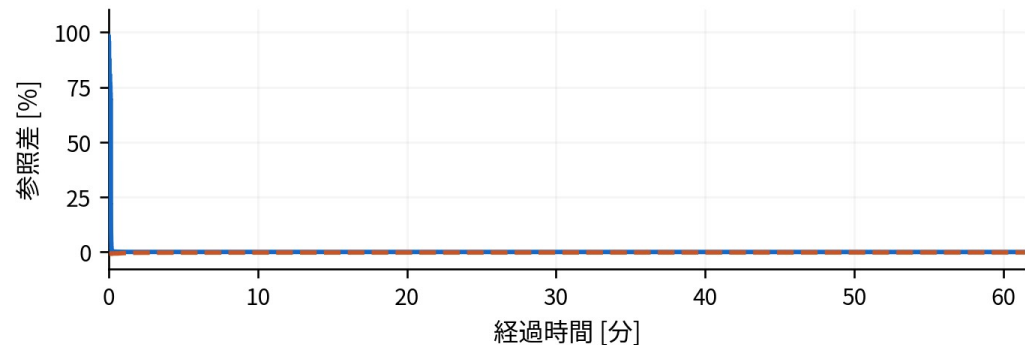
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 24/31

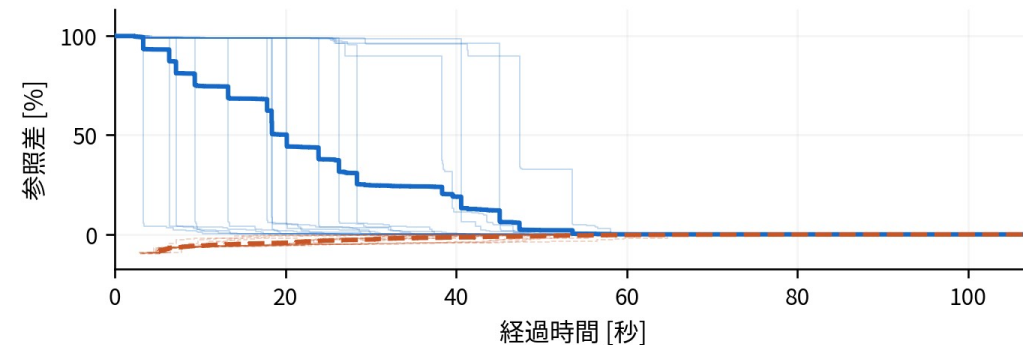
093 reblock354 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



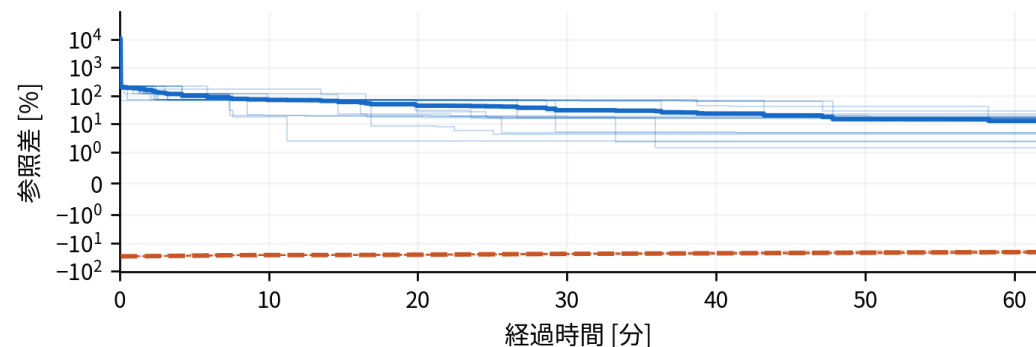
094 reblock420 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



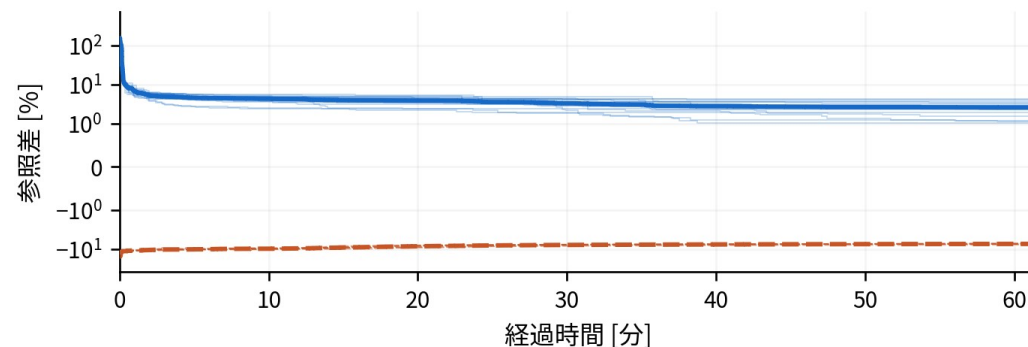
095 rvb-sub [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



096 sct1 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



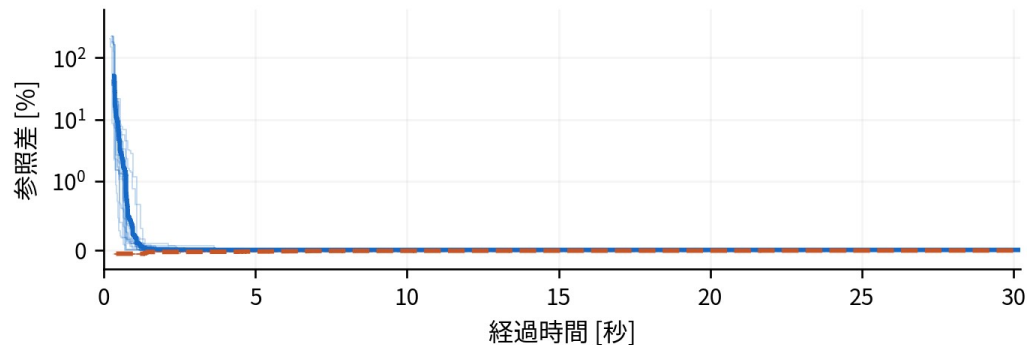
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 25/31

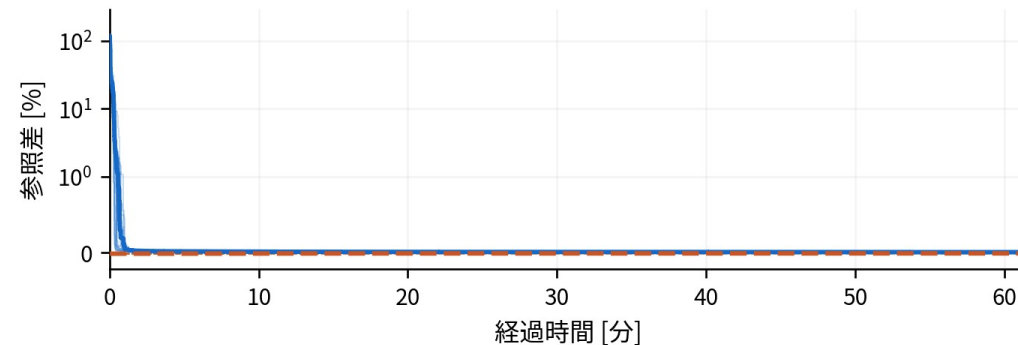
097 sct2 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



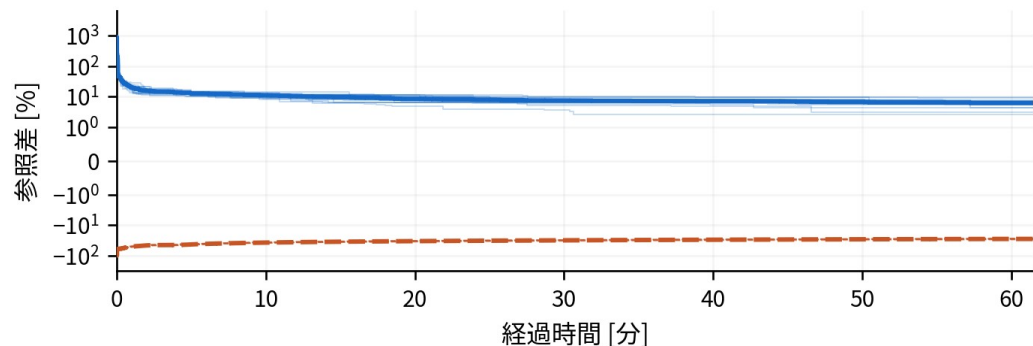
098 sct5 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 2/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



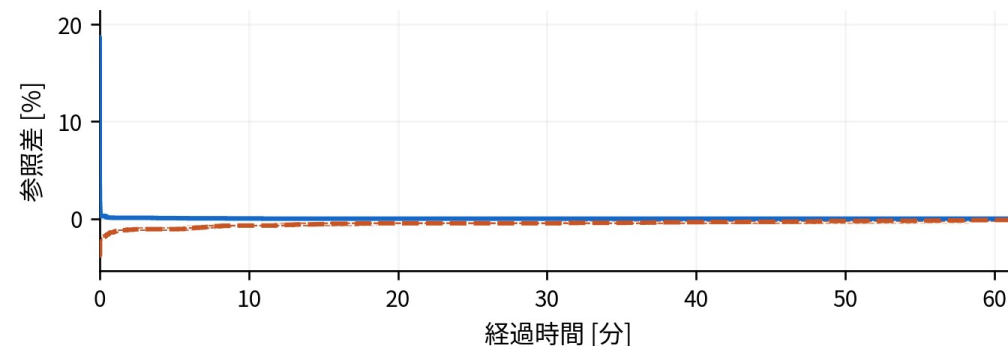
099 set3-09 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



100 seymour [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 7/16 / 縦軸：線形



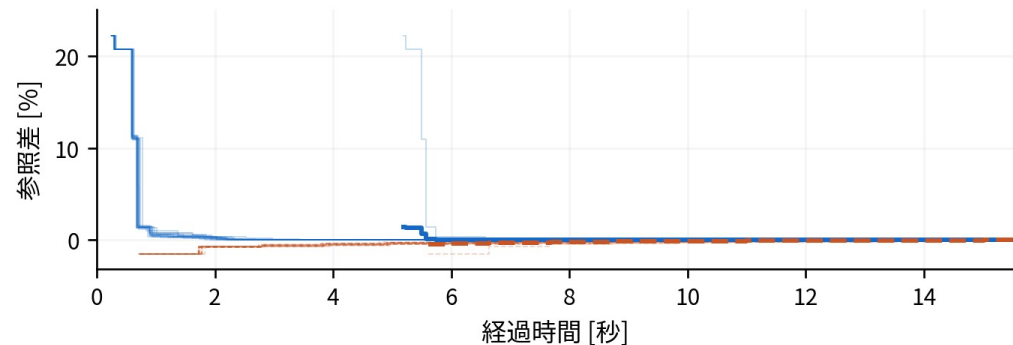
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 26/31

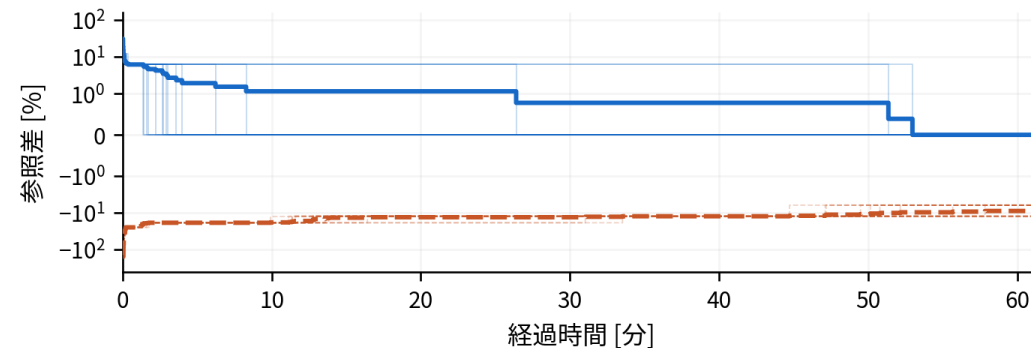
101 seymour1 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



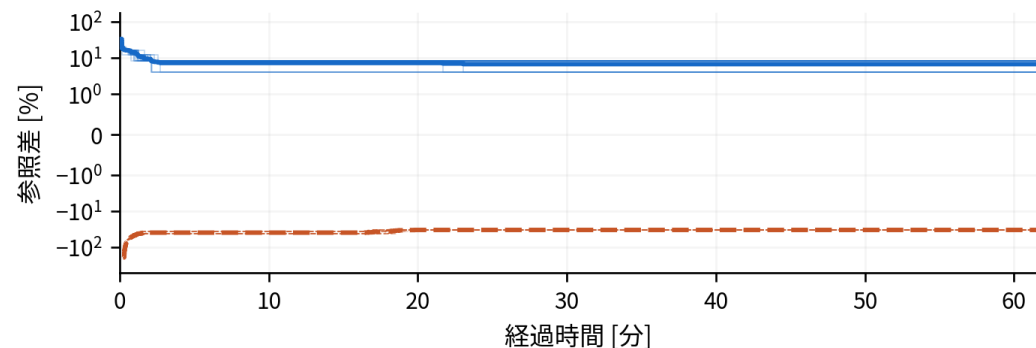
102 sorrell3 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



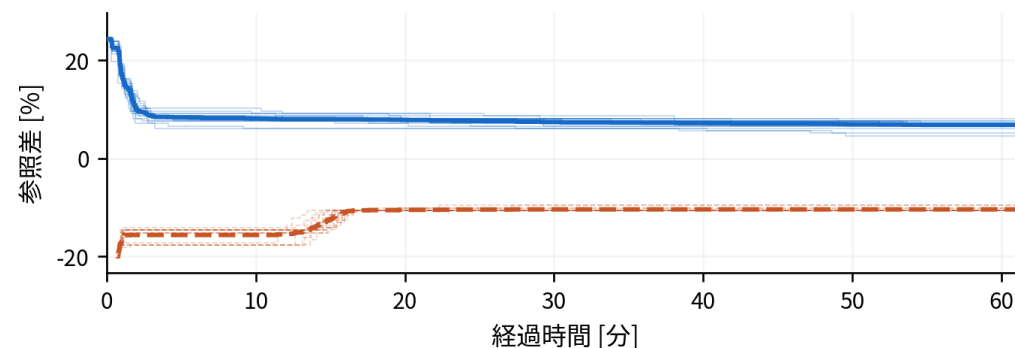
103 sorrell4 [hard]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



104 sorrell7 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



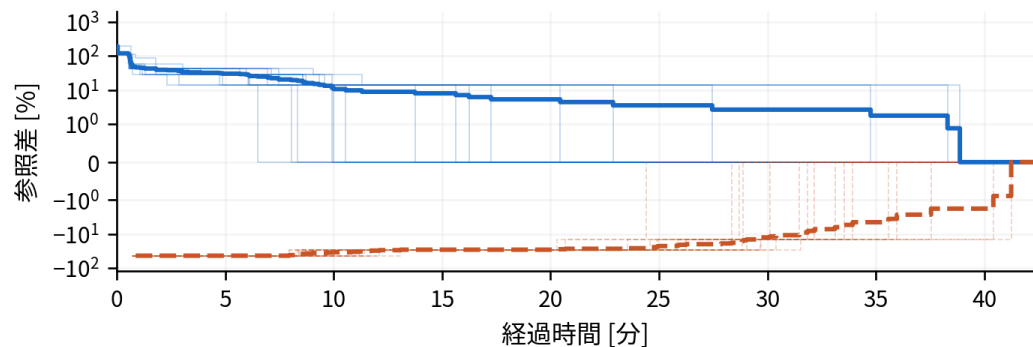
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 27/31

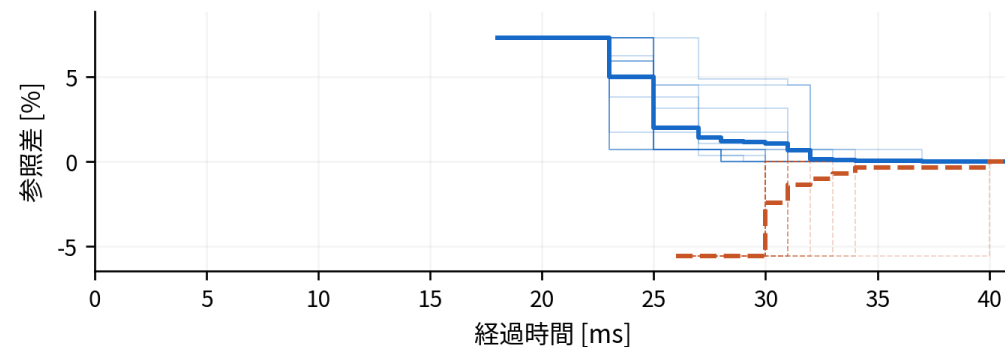
105 supportcase10 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



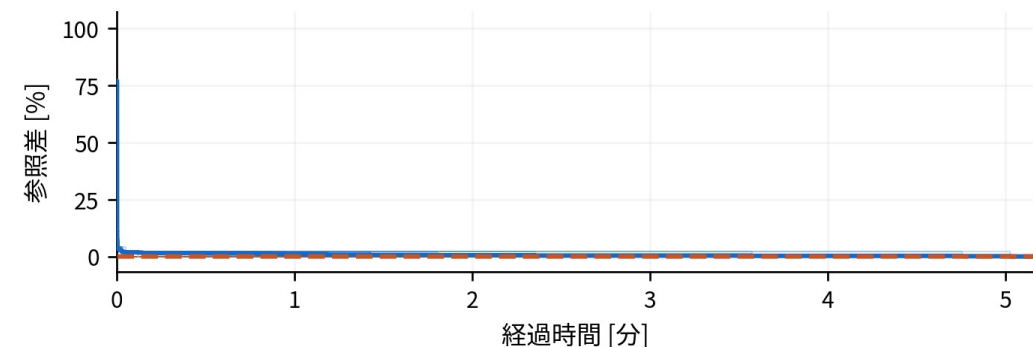
106 supportcase16 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



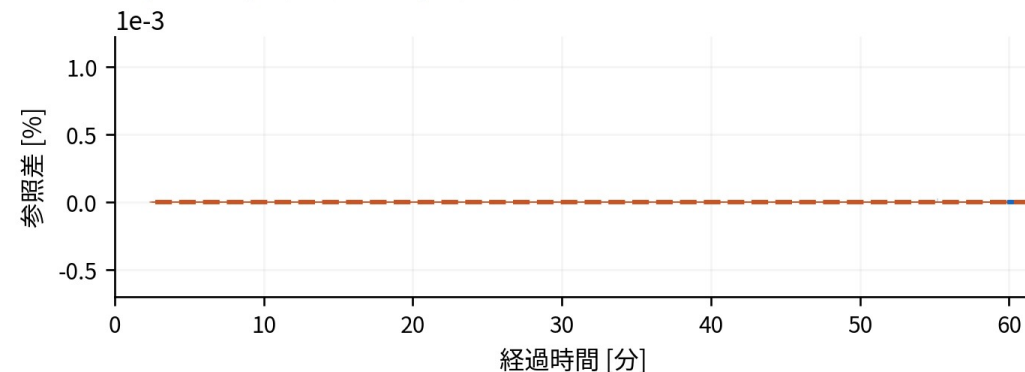
107 supportcase18 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



108 supportcase19 [easy]

P 9/16 ・ D 16/16 / 最適終了 7/16 / 縦軸：線形



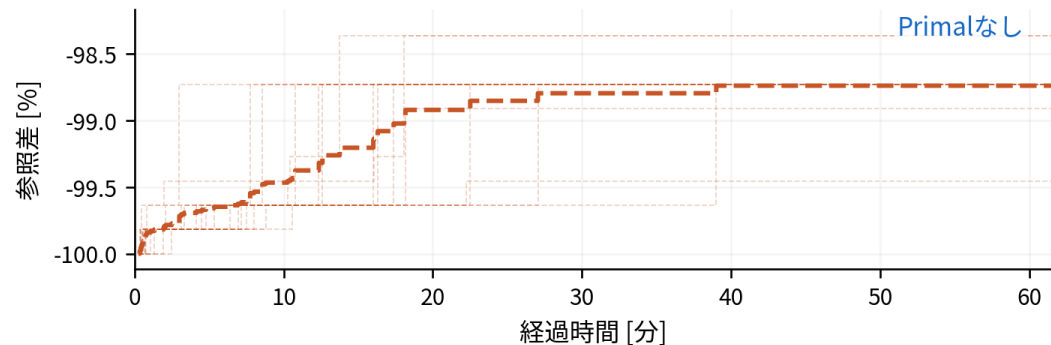
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 28/31

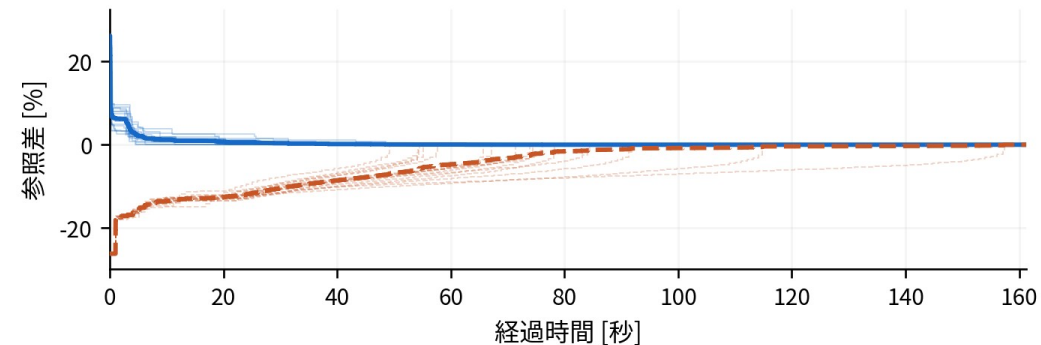
109 supportcase22 [open]

P 0/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：線形



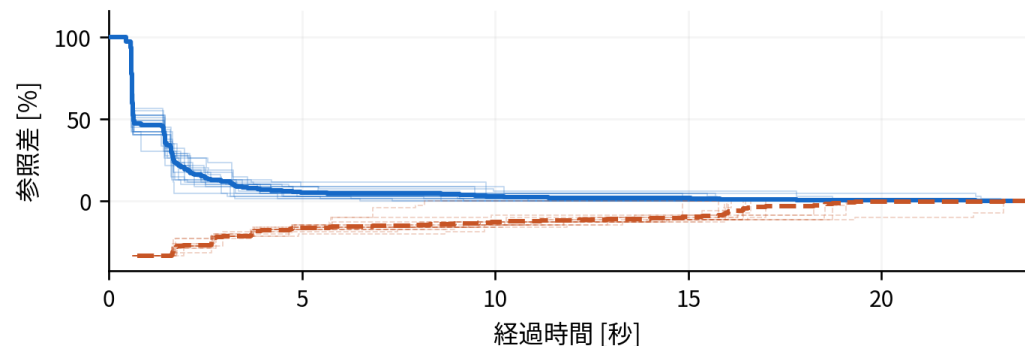
110 supportcase26 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



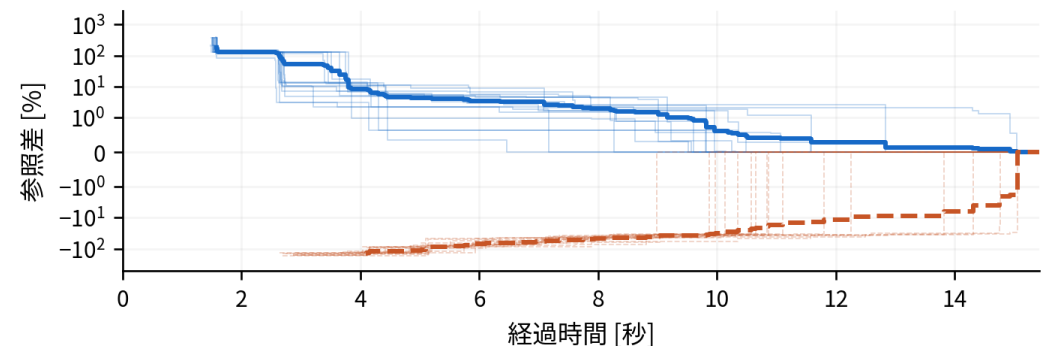
111 supportcase33 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



112 supportcase37 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



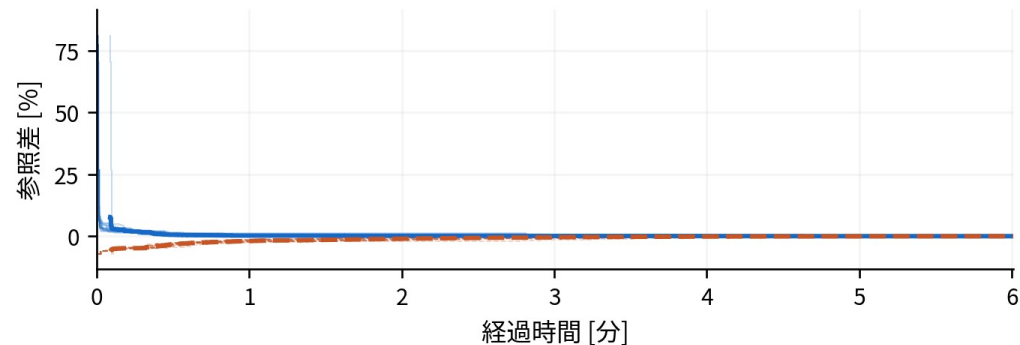
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 29/31

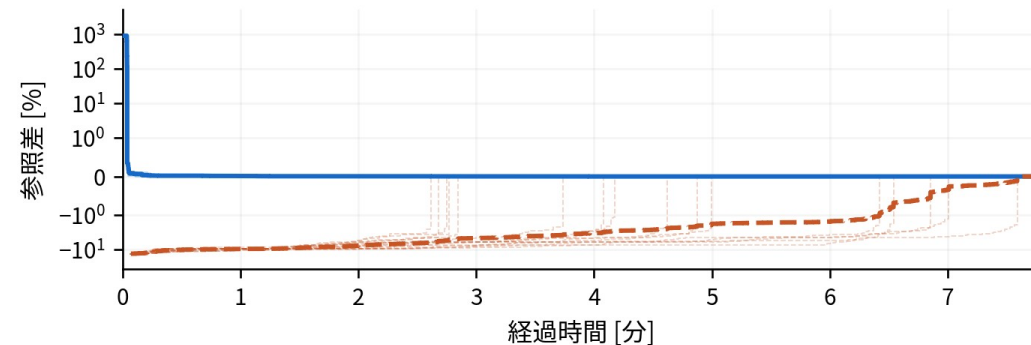
113 supportcase40 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



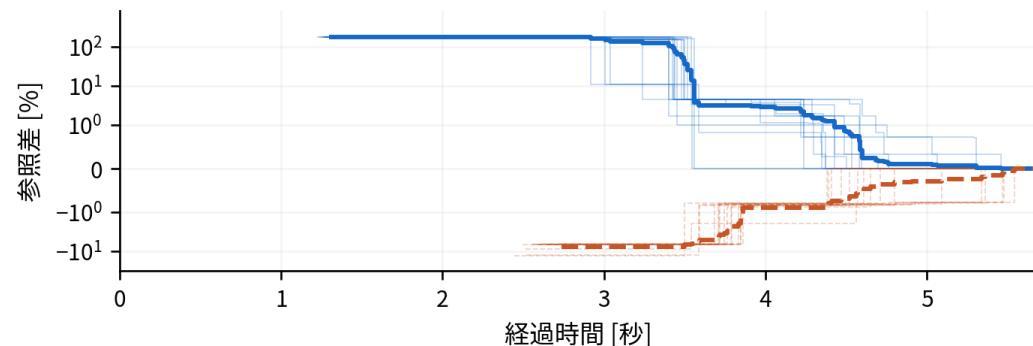
114 supportcase6 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



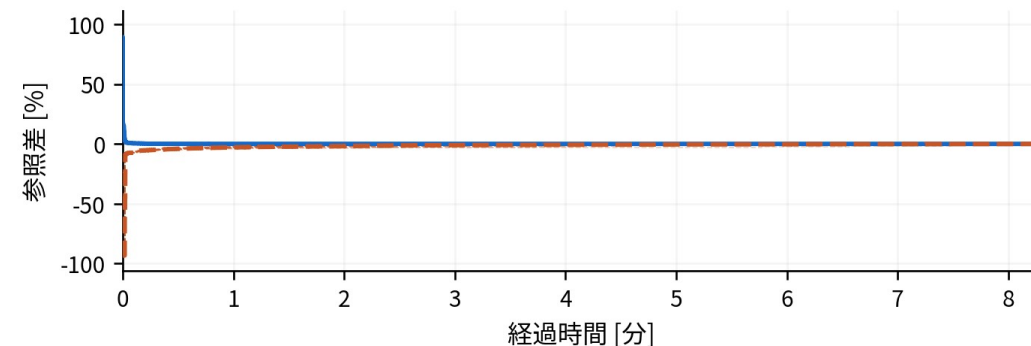
115 supportcase7 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数 (±1%内は線形)



116 toll-like [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



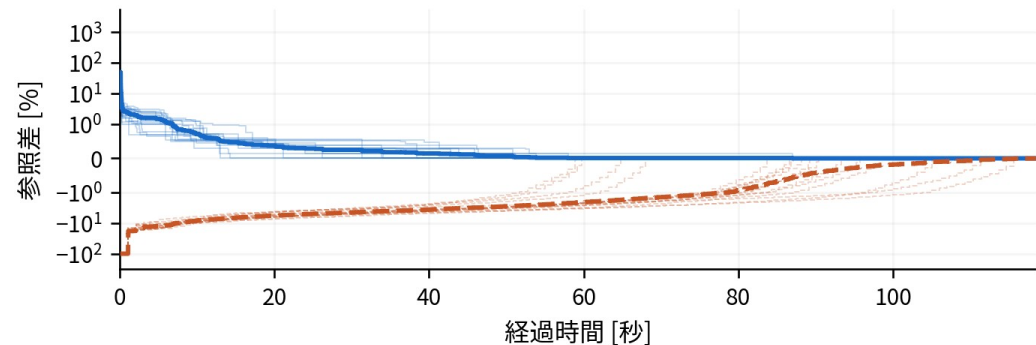
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 30/31

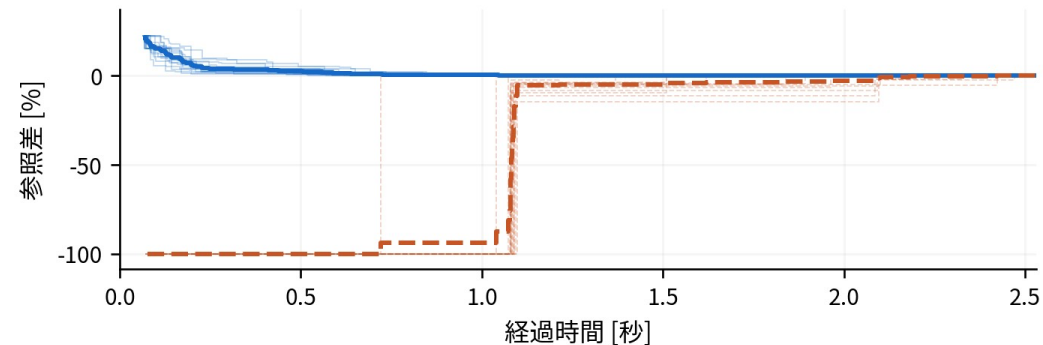
117 traininstance2 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



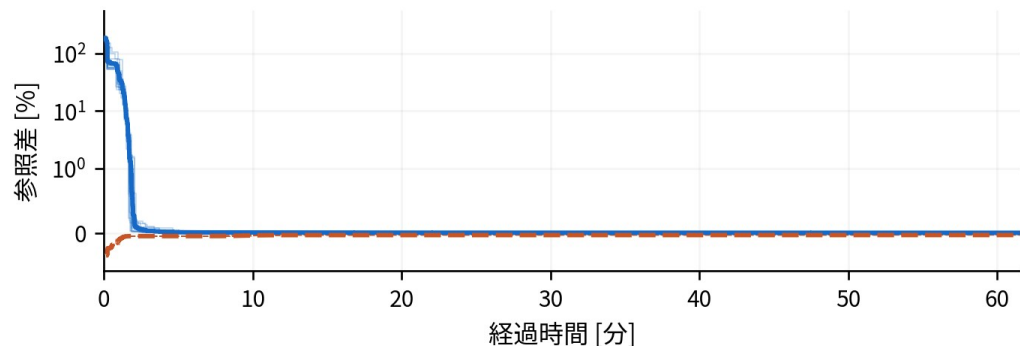
118 traininstance6 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：線形



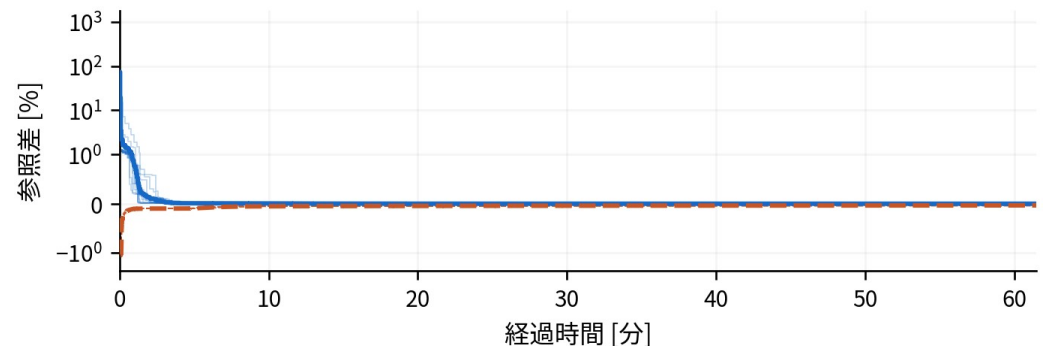
119 uccase10 [open]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



120 uccase7 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 0/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



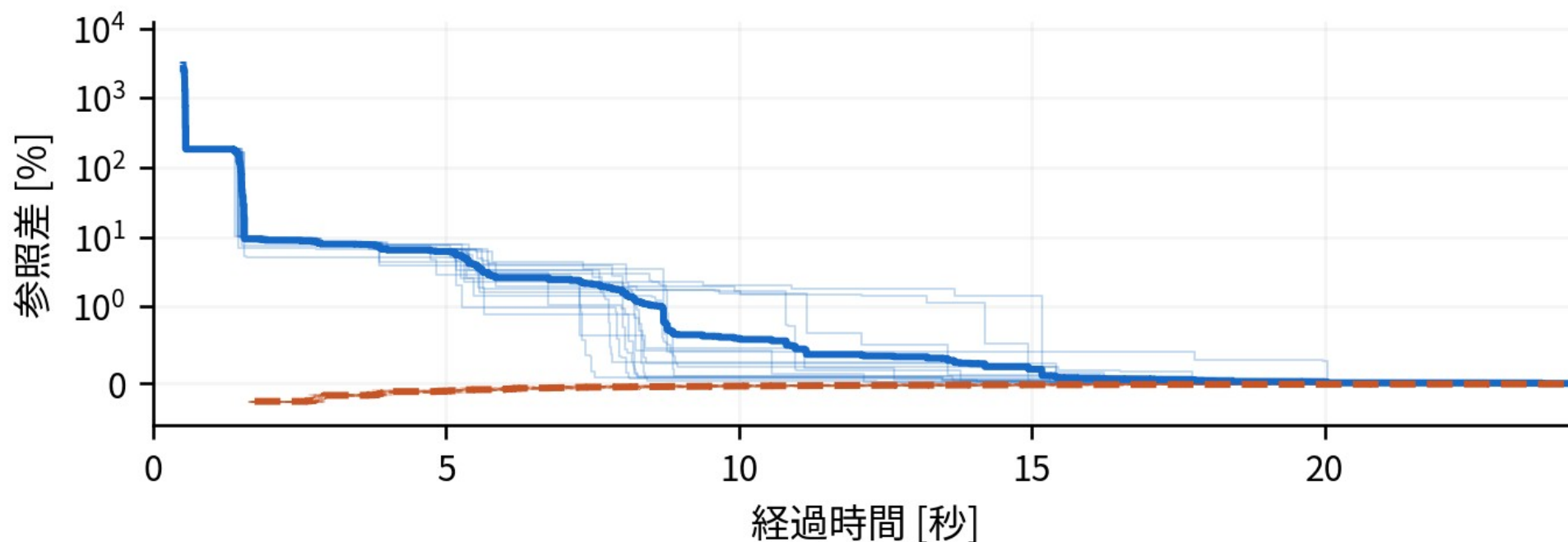
時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

全 121 問の Primal ・ Dual 軌跡 31/31

121 uccase8 [easy]

P 16/16 ・ D 16/16 / 最適終了 16/16 / 縦軸：対数（±1%内は線形）



時間・縦軸は問題別。P/D の平均本数は各図。OPT は許容差内の終了コード 2。

[← 問題名索引](#)

多腕バンディットとの違い：目的と「1 回の試行」が異なる

共通点：複数の候補を試し、観測に応じて次の計算資源を配る。

比較する点	標準的な確率的 MAB（累積報酬型）	本研究のシード探索
目的	試行を通じた累積報酬を最大化	締切時の最良 1 解／目標への初到達
観測	同じ腕の一定分布から報酬を反復取得	同じ探索を継続した時系列を観測
資源配分	各腕を引く回数を決める	候補数・選別時刻・スレッド数を決める

近い枠組み：非確率的な最良腕識別・ Successive Halving ／ Hyperband 。
極値バンディットも「得られた最良値」を目的とするため、別物とは言い切れない。

本研究の焦点：最良値の裾・配分の理論と、 MIP 探索の継続・スレッド増強を含む実測。

バンディットの発想を共有する。標準的な累積報酬の保証が、そのまま最良解や Cut の保証にはならない。